Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 517.957

На правах рукописи

АЖМОЛДАЕВ ГАЗИЗ ФАЙЗУЛЛАЕВИЧ

Об усреднении аттракторов уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
доктор физико-математических наук,
профессор
К.А. Бекмаганбетов

доктор физико-математических наук,
профессор
Г.А. Чечкин

Республика Казахстан
Астана, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Современное материаловедение и прикладные задачи физики, биологии и химии приводят к необходимости исследования процессов, происходящих в микронеоднородной среде (например, в каркасных структурах, пористых средах, композиционных материалах с наноструктурой и др.). Решение таких задач с помощью численных методов и вычислительных средств представляет большую трудность, так как они требуют исследования и решения систем алгебраических уравнений с миллиардами неизвестных. В таких случаях на помощь приходят методы асимптотического анализа и теории усреднения, которые позволяют записать значительно более простые по структуре задачи, но близкие к исходным по решению [1-25]. Также следует упомянуть фундаментальные труды [26-30], где приведена обширная библиография по данной теме.

Аттракторы описывают поведение решений диссипативных нелинейных эволюционных уравнений на больших промежутках времени и характеризуют устойчивость или неустойчивость предельных структур соответствующих динамических систем. В данной работе исследуется асимптотическое поведение аттракторов системы уравнений реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами как в самом уравнении, так и в граничных условиях, в областях с локально периодической и случайно осциллирующей границей. Доказано существование траекторных аттракторов, построены предельные (усреднённые) системы уравнений реакции-диффузии как в случае локально-периодической, так и в случае статистически однородной случайно осциллирующей границы. Некоторые результаты, связанные с усреднением для различных задач в областях с осциллирующей границей, можно найти в работах [31-40].

В данной диссертационной работе устанавливается слабая сходимость («почти наверное» в стохастическом случае, то есть с вероятностью единица) траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ систем уравнений реакции-диффузии в областях с осциллирующей границей к траекторным аттракторам $\overline{\mathfrak{A}}$ усреднённых систем при $\varepsilon \to 0$. Здесь малый параметр ε характеризует период и амплитуду колебания границы. Параметр ε в некоторой степени также входит в третье краевое условие на части локально-периодической осциллирующей границы. В зависимости от соотношения между степенями малого параметра в пределе получаются три различные предельные задачи (критический, субкритический и суперкритический случаи). В случайной постановке задачи параметр ε также характеризует микронеоднородность на границе области.

Цель работы. Целью данной работы является исследование асимптотического поведения траекторных аттракторов начально-краевой задачи для системы уравнений реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами в области с осциллирующей границей при стремлении малого параметра, определяющего осцилляцию границы, к нулю.

Методы исследования. Для исследования поставленных задач используются методы асимптотического анализа и теории усреднения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, кроме того, используется аппарат качественной теории нелинейных уравнений в частных производных и методы функционального анализа.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Описано предельное поведение траекторных аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в зависимости от соотношения параметров β и $1-\alpha$, являющихся степенями малого параметра при неизвестных функциях в третьем краевом условии на локально осциллирующей границе.
2. Описано предельное поведение траекторного аттрактора системы уравнений реакции-диффузии с третьим краевым условием на случайной осциллирующей границе.

Описание основных результатов исследования.

Во втором разделе диссертационной работы установлены условия сходимости траекторного аттрактора системы уравнений реакции-диффузии в области с быстро осциллирующей границей к траекторному аттрактору предельной (усреднённой) задачи в области с гладкой (плоской) границей. Показано, что в зависимости от характера осцилляций и параметров задачи, при стремлении малого параметра к нулю, третье краевое условие может переходить в одно из трёх различных краевых условий: третье краевое условие (условие Фурье) в критическом случае, второе краевое условие (условие Неймана) в субкритическом случае или первое краевое условие (условие Дирихле) в суперкритическом случае. Сформулированы и доказаны соответствующие теоремы о сходимости траекторных аттракторов.

В третьем разделе получены условия сходимости траекторного аттрактора для системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей. Сформулирована теорема о сходимости траекторных аттракторов начально-краевой задачи к траекторному аттрактору соответствующей усреднённой (предельной) задачи.

Обоснование новизны и значимости полученных результатов.

Полученные в настоящей работе научные результаты являются новыми и носят теоретический характер. Они описывают долговременное (асимптотическое во времени) поведение решений системы уравнений реакции-диффузии в областях с локально-периодической и случайной осциллирующей границей. Полученные результаты также представляют интерес с точки зрения прикладной математики и могут быть использованы при численном моделировании процессов переноса, таких как движения жидкости или газа в средах с быстро осциллирующими (шероховатыми) границами.

Кроме того, научные результаты данной работы могут быть использованы в образовательном процессе при подготовке научных кадров в магистратуре и докторантуре в рамках элективных курсов по дифференциальным уравнениям с частными производными, теории усреднения и качественной теории нелинейных уравнений.

Связь работы с другими научно-исследовательскими проектами.

Диссертационная работа выполнена в рамках грантового проекта, финансируемого из государственного бюджета AP26199535 «Качественная теория нелинейных дифференциальных и интегральных операторов со сложной структурой».

Тематика диссертационного исследования соответствует научному направлению «Естественные науки» в рамках приоритетного направления «Интеллектуальный потенциал страны», а также специализированному научному направлению «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и геологии».

Результаты диссертации могут найти применение в области математики и ее приложений.

Новые научные результаты, полученные в работе.

В данной работе получены следующие новые научные результаты:

1. Доказаны теоремы об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с локально осциллирующей границей в критическом, субкритическом и суперкритическом случиях.

2. Доказана теорема об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 работах (4 статьи и 7 тезисов докладов). Из них 4 статьи опубликованы в журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus (в том числе 3 статьи – в журналах с процентилем выше 35, и из них 2 статьи – в зарубежных изданиях).

1. Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Critical case // Networks and Heterogeneous Media. – 2024. – Vol. 19, Iss. 3. – P. 1381–1401 (IF2024=1.3, Q3; CiteScore2024=1.9, процентиль 43).

2. Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Supercritical case // Ufa Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 17, Iss. 2. – P. 91–104 (IF2024=0.4, Q4; CiteScore2024=1.2, процентиль 43).

3. Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Subcritical case // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2025. – Vol. 118, Iss. 2. – P. 28–43 (IF2024=0.9, Q2; CiteScore2024=1.4, процентиль 53).

4. Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to the reaction-diffusion system in a domain with rough boundary // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2025. – Vol. 126, Iss. 2. – P. 3–24 (IF2024=0.3, Q4; CiteScore2025=0.4 процентиль 18).

Тезисы в материалах международных конференций.

1. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // XIX международная научная конференция

студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2024» (Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 2024. – С. 12-13).

2. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 270-летию Московского университета (Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 2024. – С. 41-48).

3. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Актуальная проблема анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (EMJ-2025). Сборник тезисов международной конференции, посвященной 15-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal» (Астана: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумелёва, 2025. – С. 76-77.)

4. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей // XX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2025» (Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 2025. – С. 12-15).

5. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Республиканская научная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова (Ташкент: Национальный университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2025. – С. 179-180).

6. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // Международная конференция, посвящённая выдающему математику И.Г. Петровскому (Москва: Московский государственный университет, 2025. – С. 12-13).

7. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // 15^{th} ISAAC Congress (Astana: Nazarbayev university, 2025. – P. 167).

Апробация полученных результатов.

Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференциях:

1. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Международная научная конференция «Математика в созвездии наук», посвящённая 85-летию со дня рождения академика РАН В.А. Садовничего (Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 1-2 апреля 2024 года)

2. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // XIX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2024», посвящённая 270-летию Московского университета (Астана: Казахстанский филиал

Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 19-20 апреля 2024 года)

3. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Международная научно-практическая конференция, посвященная 270-летию Московского университета «Фундаментальная наука и приоритеты XXI века». (Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 29 ноября 2024 года)

4. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // «Актуальная проблема анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2025). Международная конференция, посвященная 15-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal» (Астана: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумелёва, 7-11 января 2025 года)

5. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей // XX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2025» (Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 11-12 апреля 2025 года)

6. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Республиканская научная конференция «Современные методы математической физики и их приложения», посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова (Ташкент: Национальный университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 22-24 апреля 2025 года)

7. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая выдающему математику И.Г. Петровскому (Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 19-23 мая 2025 года)

8. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // 15th ISAAC Congress (Astana: Nazarbayev university, 21-25 июля 2025 года)

Кроме того, результаты работы были обсуждены на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар по уравнениям математической физики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Руководитель: Г.А. Чечкин (Москва, 18 сентября 2024 года).

2. Научный семинар «Функциональный анализ и его приложения». Руководители: академик НАН РК М. Отелбаев, академик НАН РК Р.О. Ойнаров, профессора Е.Д. Нурсултанов и К.Н. Оспанов (Астана, 13 марта 2025 года; 5 июня 2025 года).

3. Научный семинар кафедры «Фундаментальная математика» Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумелёва (Астана, 25 сентября 2025 года).

Вклад докторанта в подготовку каждой публикации.

Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в 4 научных статьях. Все статьи подготовлены в соавторстве. В этих работах постановка задач и выбор методологии исследования предложены научными консультантами, а докторант самостоятельно сформулировал основные и вспомогательные результаты, и привел их доказательства.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, основной части, состоящей из трёх разделов, заключения и списка использованных источников. Нумерация формул устроена следующим образом: первая цифра означает номер раздела, вторая – номер подраздела, третья – порядковый номер формулы в данном подразделе. Нумерация теорем, лемм, утверждений и замечаний также трёхуровневая и устроена по вышеотмеченной схеме. Общий объём работы составляет 100 страниц.

Основное содержание работы.

Во введении даются обоснования актуальности и новизны темы, сформулированы цели, объект, предмет и задачи исследования. Приведён список опубликованных работ по теме диссертации, а также перечень конференций и семинаров, на которых докладывались результаты исследования.

В первом разделе диссертации приведены основные понятия, связанные с траекторными аттракторами автономных эволюционных уравнений. А именно, здесь приведены определение траекторного аттрактора, схема его построения и соответствующие утверждения. Также в данной главе определяется вероятностная структура, описывающая случайную осцилляцию границы. Кроме того, формулируются и обосновываются условия, при которых возможно использование эргодической теоремы Биркгофа.

Во втором разделе рассматривается система уравнений реакции-диффузии в микронеоднородной области с локально-периодической осциллирующей границей. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с гладкой границей, где Ω лежит на полуплоскости $\{x_d > 0\}$ и $\Gamma_1 \subset \{x: x_d = 0\}$. Зададим гладкую неположительную 1 – периодическую по $\hat{\xi}$ функцию $F(\hat{x}, \hat{\xi})$, $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}), \hat{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})$, и определим область Ω_ε следующим образом: $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1^\varepsilon = \left\{x = (\hat{x}, x_d) : (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d = \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right\}$, $0 < \alpha < 1$. То есть мы добавили к области Ω тонкий осциллирующий слой $\Pi_\varepsilon = \left\{x = (\hat{x}, x_d): (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d \in \left[0, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right)\right\}$. Нами предполагается, что $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ имеет компактный носитель на Γ_1 по переменной $\hat{\xi}$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\
\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\beta p\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = \varepsilon^{1-\alpha} g\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}\right), & x = (\hat{x}, x_d) \in \Gamma_1^\varepsilon, t > 0, \\
u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\
u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0,
\end{cases} \tag{1}
$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u^1, \dots, u^n)^\top$ – неизвестная вектор-функция;

$f = (f^1, \dots, f^n)^\top$ – заданная нелинейная функция;

$h = (h^1, \dots, h^n)^\top$ – заданная вектор-функция, а

λ – $n \times n$ – матрица с постоянными коэффициентами, имеющая положительную симметрическую часть, то есть $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^\top) \geq \varpi I$, $\varpi > 0$ (здесь I – единичная матрица размерности $n \times n$). Положим что, $p(\hat{x}, \hat{\xi}) = \operatorname{diag}\{p^1, \dots, p^n\}$, $g(\hat{x}, \hat{\xi}) = (g^1, \dots, g^n)^\top$ – непрерывные, 1-периодические по $\hat{\xi}$ и $p^i(\hat{x}, \hat{\xi})$, $i = 1, \dots, n$, положительные функции. Здесь $\frac{\partial}{\partial \nu} := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} N_k, i = 1, \dots, n$ и $N = (N_1, \dots, N_d)$ единичная внешняя нормаль к границе области. Обозначим через $p_{\max}$ максимум по $x \in \Gamma_1$ и i функций p^i.

Предполагаем, что функция $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеет среднее $\overline{a}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{\infty,*w}(\Omega)$, то есть

$$
\int_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \to \int_\Omega \overline{a}(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \to 0+) \tag{2}
$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$ и для всех $i = 1, \dots, n$.

Для вектор-функции $h(x, \xi)$ предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ функции $h_\varepsilon^i(x) = h^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(\Omega^+)$ и имеют средние $\overline{h^i}(x)$ в пространстве $L_2(\Omega^+)$ при $\varepsilon \to 0+$, то есть

$$
\int_{\Omega^+} h^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \to \int_{\Omega^+} \overline{h^i}(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \to 0+) \tag{3}
$$

для любой функции $\varphi \in L_2(\Omega)$ и для всех $i = 1, \dots, n$.

Преполагается, что вектор-функция $f(v) \in [C(\mathbb{R}^n)]^n$ удовлетворяет следующим неравенствам

$$
\sum_{i=1}^n |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i - 1}} \leq C_0 \left(\sum_{i=1}^n |v^i|^{p_i} + 1 \right), \quad 2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{n-1} \leq p_n, \tag{4}
$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i |v^i|^{p_i} - C \le \sum_{i=1}^{n} f^i(v) v^i, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

Утверждение 1. Задача (1) имеет траекторный аттрактор (смотри Определение 1.1.2) $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ ограничено в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{b}$ и компактно в $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Более того,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon ,$$

ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ не пусто и ограничено в $\mathcal{F}_{\varepsilon}^{b}$.

Введем обозначения

$$G(\hat{x}) = \int\limits_{[0,1)^{d-1}} \sqrt{|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})|^2}\, g\big(\hat{x}, \hat{\xi}\big) d\hat{\xi}, \tag{6}$$

$$P(\hat{x}) = \int\limits_{[0,1)^{d-1}} \sqrt{|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})|^2}\, p\big(\hat{x}, \hat{\xi}\big) d\hat{\xi}. \tag{7}$$

Имеются следующие сходимости:

$$\varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g^i\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \cdot v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds \to \int\limits_{\Gamma_1} G^i(\hat{x}) \cdot v(x)\, ds \tag{8}$$

и

$$\varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p^i\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds \to \int\limits_{\Gamma_1} P^i(\hat{x}) v(x)\, ds \tag{9}$$

для любого $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь ds является элементом $(d-1)$-мерной меры на гиперповерхности.

Описываем поведение задачи (1) при $\varepsilon \to 0$ в критическом случае $\beta = 1-\alpha$. Получаем следующую начально-краевую задачу с неоднородным граничным условием Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda \Delta u_0 - \overline{a}(x) f(u_0) + \overline{h}(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} + P(\hat{x}) u_0 = G(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{10}$$

Здесь функции $\overline{a}(x)$ и $\overline{h}(x)$ определены в (2) и (3), $G(\hat{x})$ и $P(\hat{x})$ определены в (6) и (7), соответственно.

Начально-краевая задача (1) при $\varepsilon \to 0$ в субкритическом случае $\beta > 1 - \alpha$ сводится к следующей усреднённой задаче с неоднородным граничным условием Неймана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda \Delta u_0 - \overline{a}(x) f(u_0) + \overline{h}(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} = G(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0. \end{cases} \tag{11}$$

И, наконец, при переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$ в суперкритическом случае $\beta < 1 - \alpha$ из исходной задачи (1) получаем следующую предельную задачу с однородным граничным условием Дирихле:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda \Delta u_0 - \overline{a}(x) f(u_0) + \overline{h}(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{12}$$

Утверждение 2. Задачи (10) – (12) имеют траекторные аттракторы $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Множества $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничены в $\mathcal{F}_+^b$ и компактны в Θ_+^{loc}. Более того,

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}},$$

ядро $\overline{\mathcal{K}}$ задачи (10) – (12) непусты и ограничены в $\mathcal{F}^b$.

Теорема 1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} выполняется предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \text{ при } \varepsilon \to 0+.$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \text{ при } \varepsilon \to 0+ \text{ в } \Theta^{loc}.$$

В третьем разделе рассматривается система уравнений реакции-диффузии в области со случайной быстро осциллирующей границей. Пусть $D \subset \mathbb{R}^d \cap \{x \mid x_d > 0\}$, $d \geq 2$, – гладкая ограниченная область, граница которой содержит нетривиальный плоский участок $\Gamma_1 = \partial D \cap \{x \mid x_d = 0\}$ с непустой $(d-1)$-мерной внутренностью $\overset{\circ}{\Gamma}_1$. Мы возмущаем плоскую часть границы таким образом, что возмущённая область имеет осциллирующую (колеблющуюся) границу (смотри рисунок 1). С этой целью вводим гладкую неотрицательную функцию $g(\hat{x})$, где $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$, такую, что $\operatorname{supp} g(\hat{x}) \subset \Gamma_0 \Subset \overset{\circ}{\Gamma}_1$, и зададим статистически однородную неположительную случайную функцию $F(\hat{\xi}, \omega)$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$, обладающую гладкими реализациями и определенную на страндартном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ определим

$$\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \hat{x} \in \Gamma_1, \qquad \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) < x_d \leq 0\}$$

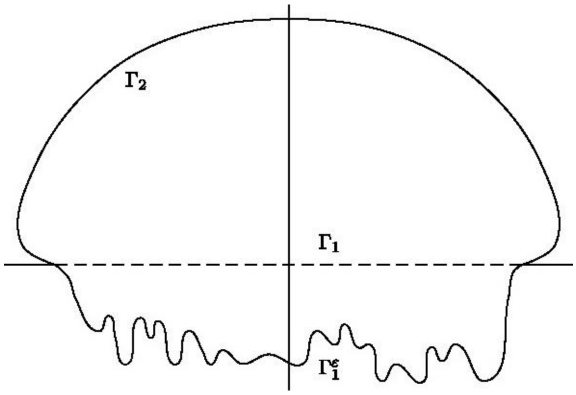

Рисунок 1 – Область со случайной быстро осциллирующей границей

И, наконец, вводим возмущенную область со случайной границей

$$D^\varepsilon = D \cup \Pi_\varepsilon.$$

Согласно данной конструкции, граница ∂D^ε состоит из частей Γ_2 и $\Gamma_1^\varepsilon = \left\{x \in \partial D^\varepsilon \ : \ (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d = \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right\}$ вместе образующие границу области.

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}, \omega\right) f(u_\varepsilon) + r\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}, \omega\right), & x \in D^\varepsilon, t > 0, \\
\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + g(\hat{x}) p\left(\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) u_\varepsilon = g(\hat{x}) q\left(\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right), & x = (\hat{x}, x_d) \in \Gamma_1^\varepsilon, t > 0, \\
u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\
u_\varepsilon = U(x), & x \in D^\varepsilon, t = 0,
\end{cases} \tag{13}
$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u^1, \dots, u^n)^\top$ – неизвестная вектор-функция;

$f = (f^1, \dots, f^n)^\top$– заданная нелинейная функция;

$r = (r^1, \dots, r^n)^\top$ – заданная правая часть;

λ – матрица размером $n \times n$ с постоянными коэффициентами, обладающая положительно определенной симметрической частью: $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^\top) \geq \varpi I$ (где I – единичная матица порядка n, а $\varpi > 0$). Предполагается, что $p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) = \operatorname{diag}\{p^1, \dots, p^n\}$, $q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) = (q^1, \dots, q^n)^\top$ случайные статистически однородные функции, причём $p^i\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) > 0$ при $i = 1, \dots n$. Здесь $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial u_\varepsilon^n}{\partial \nu}\right)^\top$ – нормальная производная вектор-функции u_ε, умноженная на матрицу λ, где $\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \nu} := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \lambda_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon^j}{\partial x_k} N_k$, $i = 1, \dots, n$ и $N = (N_1, \dots, N_d)$ – единичная внешняя нормаль к границе области. Обозначим через $p_{\max}$ максимум по $x \in \Gamma_1$ и i функций p^i.

Эргодическая теорема Биркгофа позволяет заключить, что функции $a(x, \xi, \omega)$ и $r(x, \xi, \omega)$ имеют пространственные средние значения

$$
\overline{a}(x) := M(a)(x) = \mathbb{E}(\mathrm{A})(x), \qquad \overline{r}(x) := M(r)(x) = \mathbb{E}(\mathrm{R})(x)
$$

для любого $x \in D$.

Из утверждения 1.2.2, почти наверное при $\omega \in \Omega$

$$
\int_D a_\varepsilon(x, \omega) \varphi(x) dx \to \int_D \overline{a}(x) \varphi(x) dx \;\; (\varepsilon \to 0+) \;\; \forall \varphi \in L_1(D), \tag{14}
$$

$$
\int_{D^+} r_\varepsilon^i(x, \omega) \varphi(x) dx \to \int_{D^+} \overline{r}^i(x) \varphi(x) dx \;\; (\varepsilon \to 0+) \;\; \forall \varphi \in L_2(D^+), \tag{15}
$$

где $i = 1, \dots, n$ и D^+ – такая область, что $D^\varepsilon \subset D^+$ для любого ε.

Обозначим

$$
P(\hat{x}) = \mathbb{E}\left(\rho(\omega) \sqrt{1 + \left(g(\hat{x}) \partial_\omega \mathrm{F}(\omega)\right)^2}\right),
$$

$$Q(\hat{x}) = \mathbb{E}\left(\varrho(\omega)\sqrt{1+\left(g(\hat{x})\partial_\omega \mathrm{F}(\omega)\right)^2}\right). \tag{16}$$

Почти наверное имеют место следующие сходимости:

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} q^i\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x},\varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right) ds \to \int_{\Gamma_1} Q^i(\hat{x})\, v(x)\, ds, \tag{17}$$

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p^i\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u\left(\hat{x},\varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right) v\left(\hat{x},\varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right) ds \to$$

$$\longrightarrow \int_{\Gamma_1} P^i(\hat{x})\, u(x) v(x)\, ds \tag{18}$$

для любых $u, v \in H^1(D^\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь ds – элемент $(d-1)$-мерной меры на гиперповерхности.

Утверждение 3. Задача (13) имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ почти наверное ограничено в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$ и компактно в $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Более того,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ непусто, ограничено в $\mathcal{F}_\varepsilon^b$ и компактно в Θ_ε^{loc}.

Задачи (13) при $\varepsilon \to 0$ даёт следующую предельную задачу с неоднородным граничным условием Фурье

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda \Delta u_0 - \overline{a}(x) f(u_0) + \overline{r}(x), & x \in D, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} + g(\hat{x}) P(\hat{x}) u_0 = g(\hat{x}) Q(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in D, t = 0, \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $\overline{a}(x)$ и $\overline{r}(x)$ определены в (14) и (15) соответственно, а $Q(\hat{x})$ и $P(\hat{x})$ – в (16).

Утверждение 4. Задача (19) обладает траекторным аттрактором $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Множество $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Более того,

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (19), оно непусто и ограничено $\mathcal{F}^b$.

Теорема 2. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} почти наверное (в смысле меры μ) имеет место следующее предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \text{ при } \varepsilon \to 0+.$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \text{ при } \varepsilon \to 0 + \text{ в } \Theta^{loc}.$$

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Траекторные аттракторы эволюционных уравнений

Рассмотрим автономное эволюционное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \quad t \geq 0. \tag{1.1.1}$$

Пусть $A(\cdot): E_1 \to E_0$ – нелинейный оператор, E_1, E_0 – банаховы пространства, причем $E_1 \subseteq E_0$. В качестве примера, можно рассмотреть оператор $A(u) = \lambda\Delta u - a(\cdot)f(u) + h(\cdot)$, который изучается в данной работе.

Мы изучаем слабые решения $u(t)$ уравнения (1.1.1) как функции от времени t на $\mathbb{R}_+$. Множество всех решений уравнения (1.1.1) называется траекторным пространством данного уравнения и обозначается через $\mathcal{K}^+$. Далее подробно опишем траекторное пространство $\mathcal{K}^+$.

Рассмотрим решения $u(t)$ уравнения (1.1.1), определённые на отрезке $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Будем рассматривать решения задачи (1.1.1) из банахового пространства $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$. Пространство $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ состоит из функций $f(s), s \in [t_1, t_2]$, удовлетворяющих условию $f(t) \in E$ для почти всех $t \in [t_1, t_2]$, здесь E – некоторое банахово пространство, удовлетворяющее условию $E_1 \subseteq E \subseteq E_0$.

Например, в качестве $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ можно рассматривать пространства $C([t_1, t_2]; E)$ или $L_p(t_1, t_2; E)$ при $p \in [1, \infty]$. Положим, что выполняются следующие условия $\Pi_{t_1,t_2}\mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2} \subseteq \mathcal{F}_{t_1,t_2}$ и $\| \Pi_{t_1,t_2} f \|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} \leq C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \| f \|_{\mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2}}$ для всех $f \in \mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2}$. Здесь $[t_1, t_2] \subseteq [\tau_1, \tau_2]$, а Π_{t_1,t_2} обозначает оператор сужения на промежуток $[t_1, t_2]$, причём константа $C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$ не зависит от функции f.

Для $\tau \in \mathbb{R}$ обозначим через $S(\tau)$ опереатор сдвига $S(\tau)f(t) = f(\tau + t)$. Легко видеть, что если аргумент функции $f(t)$ принадлежит отрезку $[t_1, t_2]$, то аргумент функции $S(\tau)f(t)$ принадлежит отрезку $[t_1 - \tau, t_2 - \tau]$. Будем предполагать, что отображение $S(\tau)$ является изоморфизмом из $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ в $\mathcal{F}_{t_1-\tau,t_2-\tau}$ и $\| S(\tau)f \|_{\mathcal{F}_{t_1-\tau,t_2-\tau}} = \| f \|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}}$ для всех $f \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$. Заметим, что данное предположение является вполне естественным.

Положим также, что если $f(t) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$, то $A(f(t)) \in \mathcal{D}_{t_1,t_2}$, где $\mathcal{D}_{t_1,t_2}$ – некоторое банахово пространство с условием $\mathcal{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1,t_2}$. Производная $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ понимается как обобщённая производная со значениями в E_0, то есть $\frac{\partial f}{\partial t} \in D'((t_1, t_2); E_0)$ и мы будем полагать, что $\mathcal{D}_{t_1,t_2} \subseteq D'((t_1, t_2); E_0)$ для всех $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$. Функция $u(t) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$ является решением уравнения (1.1.1), если выполняется равенство $\frac{\partial u}{\partial t}(t) = A(u(t))$ в смысле обобщенных функций (в смысле пространства $D'((t_1, t_2); E_0)$).

Далее определим локальное пространство

$$\mathcal{F}_+^{loc} = \{f(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \mid \Pi_{t_1,t_2} f(t) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}, \quad \forall\ [t_1,t_2] \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Например, если $\mathcal{F}_{t_1,t_2} = C([t_1,t_2];E)$, то $\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+;E)$, а если $\mathcal{F}_{t_1,t_2} = L_p(t_1,t_2;E)$, то $\mathcal{F}_+^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+;E)$.

Функция $u(t) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ называется решением уравнения (1.1.1), если $\Pi_{t_1,t_2} u(t) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$ и $u(t)$ является решением уравнения (1.1.1) для всех $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}_+$.

Обозначим через $\mathcal{K}^+$ множество решений уравнения (1.1.1) из $\mathcal{F}_+^{loc}$. Заметим, что $\mathcal{K}^+$ не обязательно является множеством всех решений из $\mathcal{F}_+^{loc}$. Элементы множества $\mathcal{K}^+$ называются траекториями, а само множество $\mathcal{K}^+$ – пространством траекторий уравнения (1.1.1).

Предполагается, что пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ является трансляционно-инвариантным, то есть если $u(t) \in \mathcal{K}^+$, то и $u(\tau + t) \in \mathcal{K}^+$ для всех $\tau \geq 0$.

Рассмотрим теперь операторы сдвига $S(\tau)$ в $\mathcal{F}_+^{loc}$: $S(\tau)f(t) = f(\tau + t)$, $\tau \geq 0$. Очевидно, что множество отображений $\{S(\tau), \tau \geq 0\}$ образует полугруппу в $\mathcal{F}_+^{loc}$: $S(\tau_1)S(\tau_2) = S(\tau_1 + \tau_2)$ при $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, причём $S(0)$ является тождественным оператором. Полугруппа сдвигов $\{S(\tau), \tau \geq 0\}$ отображает пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ на себя, то есть $S(\tau)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+$ при всех $\tau \geq 0$. Изучаются свойства притяжения полугруппы сдвигов $\{S(\tau)\}$, действуйющей на пространстве траекторий $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$.

Определим топологию в протранстве $\mathcal{F}_+^{loc}$. Пусть задана некоторая метрика $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$, определённая на $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ для всех $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}$. Предположим, что для любых $f, g \in \mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2}$ выполняются условия

$$\rho_{t_1,t_2}\big(\Pi_{t_1,t_2} f, \Pi_{t_1,t_2} g\big) \leq D(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\rho_{\tau_1,\tau_2}(f,g)\ , \qquad [t_1,t_2] \subseteq [\tau_1,\tau_2],$$

$$\rho_{t_1-\tau,t_2-\tau}(S(\tau)f, S(\tau)g) = \rho_{t_1,t_2}(f,g), \qquad [t_1,t_2] \subset \mathbb{R}, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через Θ_{t_1,t_2} топологическое пространство $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$, снабженное этой топологией. Например, метрикой ρ_{t_1,t_2} может быть метрика, порожденная нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}}$ пространства $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$. С другой стороны, часто на практике метрика ρ_{t_1,t_2} порождает топологию Θ_{t_1,t_2}, которая слабее сильной топологии пространства $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$.

Проективный предел пространств Θ_{t_1,t_2} определяет топологию Θ_+^{loc} в $\mathcal{F}_+^{loc}$, то есть, по определению, последовательность $\{f_k(t)\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к $f(t) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если $\rho_{t_1,t_2}(\Pi_{t_1,t_2} f_k, \Pi_{t_1,t_2} f) \to 0$ при $k \to \infty$для всех $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Можно показать, что топология Θ_+^{loc} является метризуемой. Для этого, например, можно использовать метрику Фреше

$$\rho_+(f_1,f_2):=\sum_{m\in\mathbb{N}}2^{-m}\frac{\rho_{0,m}(f_1,f_2)}{1+\rho_{0,m}(f_1,f_2)}. \qquad (1.1.2)$$

Полугруппа сдвигов $\{S(\tau)\}$ непрерывна в топологии Θ_+^{loc}. Это утверждение непосредственно следует из определения Θ_+^{loc}

Определим также следующее банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b:=\{f(t)\in\mathcal{F}_+^{loc}:\|f\|_{\mathcal{F}_+^b}<+\infty\}$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b}:=\sup_{\tau\geq0}\|\Pi_{0,1}f(\tau+t)\|_{\mathcal{F}_{0,1}}.$$

Заметим, что $\mathcal{F}_+^b\subseteq\Theta_+^{loc}$. Нам потребуется только одно свойство пространства $\mathcal{F}_+^b$: оно порождает ограниченные множества в пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$. Для построения траекторного аттрактора в $\mathcal{K}^+$ вместо соответствующей топологии равномерной сходимости в банаховом пространстве $\mathcal{F}_+^b$ мы будем использовать гораздо более слабую тологию, а именно топологию локальной сходимости Θ_+^{loc}.

Предположим, что $\mathcal{K}^+\subseteq\mathcal{F}_+^b$, то есть каждая траектория $u(t)\in\mathcal{K}^+$ уравнения (1.1.1) имеет конечную норму. Определим притягивающее множество и траекторный аттрактор для полугруппы сдвигов $\{S(\tau)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$.

Определение 1.1.1. Множество $\mathcal{P}\subseteq\Theta_+^{loc}$ называется притягивающим множеством полугруппы сдвигов $\{S(\tau)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$, в топологии Θ_+^{loc}, если для любого ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ множества $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{K}^+$ множество $\mathcal{P}$ притягивает $S(\tau)\mathcal{B}$ при $\tau\to+\infty$ в топологии Θ_+^{loc}, то есть для любой ε-окрестности $O_\varepsilon(\mathcal{P})$ в Θ_+^{loc} существует $\tau_1\geq0$ такое, что $S(\tau)\mathcal{B}\subseteq O_\varepsilon(\mathcal{P})$ при любом $\tau\geq\tau_1$.

Легко заметить, что свойство притягивания множества $\mathcal{P}$ можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}S(\tau)\mathcal{B},\Pi_{0,M}\mathcal{P})\longrightarrow0\quad(\tau\to+\infty),$$

где $\mathrm{dist}_{\mathcal{M}}(X,Y):=\sup_{x\in X}\mathrm{dist}_{\mathcal{M}}(x,Y)=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\rho_{\mathcal{M}}(x,y)$ – полурасстояние Хаусдорфа от множества X до множества Y в метрическом пространстве $\mathcal{M}$. Напомним, что полурасстояние Хаусдорфа не является симметричным ни для какого $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{K}^+$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ и для каждого $M>0$.

Определение 1.1.2. Множество $\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{K}^+$ называется траекторным аттрактором полугруппы сдвигов $\{S(\tau)\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если

(i) $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc},

(ii) множество $\mathfrak{A}$ сторого инвариантно относительно полугруппы, то есть

$S(\tau)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ для всех $\tau \geq 0$,

(iii) $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством для $\{S(\tau)\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, то есть для любого $M > 0$ выполняется

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathfrak{A}\right) \to 0 \quad (\tau \to +\infty),$$

где $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$.

Сформулируем основное утверждение о траекторном аттракторе для уравнения (1.1.1).

Теорема 1.1.1 ([32, с. 4-291; 33, p. 3-362]). Пусть пространство траекторий $\mathcal{K}^+$, соответствующее уравнению (1.1.1), замкнуто в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$. Предполагается, что существует притягивающее множество $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}^+$ для полугруппы $\{S(t)\}$ в топологии Θ_+^{loc} такое, что $\mathcal{P}$ компактно в Θ_+^{loc} и ограничено в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$. Тогда полугруппа сдвигов $\{S(\tau), \tau \geq 0\}$, действующая на $\mathcal{K}^+$, имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}$. Множество $\mathfrak{A}$ компактно в Θ_+^{loc} и ограничено в $\mathcal{F}_+^b$.

Приведем описание структуры траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ уравнения (1.1.1). Рассмотрим уравнение (1.1.1) на всей числовой оси времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1.3}$$

Выше мы уже определили пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ уравнения (1.1.3) на $\mathbb{R}_+$. Распространим это определение на всю ось $\mathbb{R}$. Если функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, задана на всей оси времени, то сдвиги $S(\tau)f(t) = f(\tau + t)$ также определяются и для отрицательных значений τ. Функция $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется полной траекторией уравнения (1.1.3), если $\Pi_+ u(\tau + t) \in \mathcal{K}^+$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Здесь $\Pi_+ = \Pi_{[0,\infty)}$ обозначает оператор ограничения на полуось $\mathbb{R}_+$.

Выше мы уже определили пространства $\mathcal{F}_+^{loc}$, $\mathcal{F}_+^b$ и Θ_+^{loc}. Аналогичным образом определяются пространства $\mathcal{F}^{loc}$, $\mathcal{F}^b$ и Θ^{loc}:

$$\mathcal{F}^{loc} \coloneqq \{f(t), t \in \mathbb{R}\colon \Pi_{t_1,t_2} f(s) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2} \ \forall \ [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}\};$$

$$\mathcal{F}^b := \{f(t) \in \mathcal{F}^{loc} : \ \| f \|_{\mathcal{F}^b} < +\infty\},$$

где

$$\| f \|_{\mathcal{F}^b} := \sup_{h \in \mathbb{R}} \| \Pi_{0,1} f(\tau + t) \|_{\mathcal{F}_{0,1}}. \tag{1.1.4}$$

Топологическое пространство Θ^{loc} совпадает (как множество) с $\mathcal{F}^{loc}$ и, по определению, $f_k(t) \to f(t)$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}, если $\Pi_{t_1,t_2} f_k(t) \to \Pi_{t_1,t_2} f(t)$ при $k \to \infty$ в Θ_{t_1,t_2} для любых $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$. Легко заметить, что Θ^{loc}

является метрическим пространством, как и Θ_+^{loc}.

Определение 1.1.3. Ядро $\mathcal{K}$ уравнения (1.1.3) в пространстве $\mathcal{F}^b$ есть объединение всех полных траекторий $u(t), t \in \mathbb{R}$, уравнения (1.1.3), ограниченных в $\mathcal{F}^b$ по норме (1.1.4), то есть для любых $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\| \Pi_{0,1} u(\tau + t) \|_{\mathcal{F}_{0,1}} \leq C_u.$$

Теорема 1.1.2 ([33, p. 3-362]). Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1. Тогда

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathcal{K}.$$

Множество $\mathcal{K}$ компактно в Θ^{loc} и ограничено в $\mathcal{F}^b$.

Пусть E_0 и E_1 – банаховы пространства такие, что $E_1 \subset E_0$. Рассмотрим банаховы пространства

$$W_{p_1,p_0}(0, M; E_1, E_0) = \{\psi(t), t \in 0, M : \ \psi(\cdot) \in L_{p_1}(0, M; E_1), \qquad \psi'(\cdot) \in L_{p_0}(0, M; E_0)\},$$

$$W_{\infty,p_0}(0, M; E_1, E_0) = \{\psi(t), t \in 0, M : \ \psi(\cdot) \in L_{\infty}(0, M; E_1), \qquad \psi'(\cdot) \in L_{p_0}(0, M; E_0)\},$$

(где $p_1 \geq 1$ и $p_0 > 1$) с нормами

$$\| \psi \|_{W_{p_1,p_0}} := \left(\int_0^M \| \psi(t) \|_{E_1}^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} + \left(\int_0^M \| \psi'(t) \|_{E_0}^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}},$$

$$\| \psi \|_{W_{\infty,p_0}} := \ \operatorname{esssup} \{\| \psi(t) \|_{E_1} : \ t \in 0, M]\} + \left(\int_0^M \| \psi'(t) \|_{E_0}^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Во многих приложениях для доказательства компактности шара из $\mathcal{F}_+^b$ в Θ_+^{loc} полезна следующая лемма.

Лемма 1.1.1 (Обен-Лионс-Саймон, [41]). Пусть $E_1 \Subset E \subset E_0$. Тогда следующие вложения компактны

$$W_{p_1,p_0}(0, T; E_1, E_0) \Subset L_{p_1}(0, T; E), \qquad W_{\infty,p_0}(0, T; E_1, E_0) \Subset C([0, T]; E).$$

В следующем разделе будут изучаться эволюционные уравнения и их траекторные и глобальные аттракторы, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$. Приведем определение сходимости траекторных аттракторов.

Определение 1.1.4. Будем говорить, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ сходится к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \to 0$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}, если для любой окрестности $\mathcal{O}(\overline{\mathfrak{A}})$ из Θ_+^{loc} существует $\varepsilon_1 \geq 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}(\overline{\mathfrak{A}})$ для всех $\varepsilon < \varepsilon_1$, то есть для каждого $M > 0$ выполнено

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \ \ (\varepsilon \to 0).$$

Рассмотрим систему реакции-диффузии, для которой выполняется теорема единственности задачи Коши. В этом случае доказано, что динамическая полугруппа в H обладает глобальными аттракторами $\mathcal{A}$ (траекторные аттракторы превращаются в глобальные аттракторы).

Определение 1.1.5. Множество $\mathcal{A} \subseteq H$ называется глобальным аттрактором динамической системы $(H, \{S(t)\})$, если

1) $\mathcal{A}$ компактно в топологии H;
2) $\mathcal{A}$ является притягивающим множеством этой динамической системы;
3) $\mathcal{A}$ строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$: $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ при всех $t \geq 0$.

1.2 Вероятностная структура и основные понятия

В данном параграфе предполагается, что все случайные поля и случайные величины заданы на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, Ω – множество, $\mathcal{A}$ – сигма алгебра подмножеств Ω, а μ – вероятностная мера. Рассматриваемые в работе случайные поля являются статистически однородными.

Определение 1.2.1. Семейство измеримых отображений

$$T_x: \Omega \to \Omega, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

называется d-динамической системой, если выполняются следующие свойства:

1. Групповое свойство:

$$T_{x+y} = T_x T_y\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \ T_0 = Id,\ \ (Id\ -$$
тождественное отображение);

2. Свойство изометричности:

$$T_x\mathcal{U} \in \mathcal{A}, \quad \mu(T_x\mathcal{U}) = \mu(\mathcal{U}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{A};$$

3. Свойство измеримости: для любой измеримой функции $\phi(\omega)$ на Ω функция $\phi(T_x\omega)$ также является измеримой на $\Omega \times \mathbb{R}^d$, где пространство $\mathbb{R}^d$ снабжено борелевкой σ-алгеброй $\mathcal{B}$.

Определение 1.2.2. Пусть $\phi(\omega)$ – измеримая функция (случайная величина) на Ω. Функция $\phi(T_x\omega)$ от $x \in \mathbb{R}^d$ и $\omega \in \Omega$ называется статистичеки однородным случайным полем, а для фиксированного $\omega \in \Omega$ функция $\phi(T_x\omega)$

называется реализацией случайного поля ϕ.

Обозначим через $L_q(\Omega)$ $(q \geq 1)$ пространство измеримых функций, интегрируемых в степени q относительно меры μ.

Утверждение 1.2.1 ([29, с. 3-262; 30, с. 3-245]). Предположим, что $\phi \in L_q(\Omega)$. Тогда почти все реализации $\phi(T_x\omega)$ принадлежат пространству $L_q^{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Если последовательность $\{\phi_k\} \subset L_q(\Omega)$ сходится в $L_q(\Omega)$ к функции ϕ, то существует подпоследовательность $\{\phi_{k'}\}$ такая, что почти все реализации $\phi_{k'}(T_x\omega)$ сходятся в $L_q^{loc}(\mathbb{R}^d)$ к реализации $\phi(T_x\omega)$.

Определение 1.2.3. Измеримая на Ω функция $\phi(\omega)$ называется инвариантной, если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ почти наверное выполняется

$$\phi(T_x\omega) = \phi(\omega).$$

Определение 1.2.4. d-динамическая система T_x называется эргодической, если любая её инвариантная функция почти наверное является постоянной.

Определение 1.2.5. Пусть $\theta \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$. Будем говорить, что функция θ имеет пространственное среднее, если предел

$$M(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B|} \int\limits_B \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx$$

существует для любого ограниченного борелевского множества $B \in \mathcal{B}$, $|B| > 0$, и, кроме того, этот предел не зависит от выбора множества B. Величина $M(\theta)$ называется пространственным средним функции θ.

Утверждение 1.2.2 ([30, с. 3-245]). Пусть P – измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$, содержащее окрестность нуля. Пусть $q \geq 1$ или $q = \infty$. Предположим, что измеримая функция $\theta(x, \xi)$, $x \in P$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеет пространственнее среднее $M(\theta)(x)$ (по переменной ξ) в $\mathbb{R}_\xi^d$ для каждого $x \in P$, а семейство функций $\left\{\theta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),\ 0 < \varepsilon \leqslant 1\right\}, x \in \mathcal{K}$, ограничено в $L_q(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ – произвольное ограниченное подмножество P, содержащее окрестность нуля.

Тогда $M(\theta)(\cdot) \in L_q^{loc}(P)$ и для $q \geq 1$ имеем $\theta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M(\theta)(x)$ слабо в $L_q^{loc}(P)$ при $\varepsilon \to 0$, а для $q = \infty$ имеем $\theta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M(\theta)(x)$ $*$-слабо в $L_\infty^{loc}(P)$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее введем обозначение $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Для заданной группы T_x, $x \in \mathbb{R}^d$, рассмотрим её подгруппу

$$T_{\hat{x}}: \Omega \to \Omega, \quad \hat{x} = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, \qquad T_{\hat{x}} = T_{(\hat{x},0)}.$$

Пусть T_x – d-динамическая система в Ω. Будем считать, что $T_{\hat{x}}$ является

$(d-1)$-динамической системой в Ω (смотри определение 1.2.1 с заменой числа d на $(d-1)$).

Все выше перечисленные определения и утверждения с соответствующими изменениями справедливы и для $(d-1)$-динамической системы $T_{\hat{x}}$. В частности, имеем следующее.

Определение 1.2.6. Случайное поле $\zeta(\hat{x},\omega)$, где $(\hat{x}\in\mathbb{R}^{d-1},\ \omega\in\Omega)$ называется статистически однородным, если выполняется представление

$$\zeta(\hat{x},\omega)=\zeta(T_{\hat{x}}\omega),$$

где ζ – случайная величина на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, и

$T_{\hat{x}}$ – $(d-1)$-динамическая система на Ω.

В третьем разделе нам понадобится эргодическая теорема Биркгофа в следующей частной форме (смотри, например [29, с. 3-262; 30, с. 3-245]).

Теорема 1.2.1 (Эргодическая теорема Биркгофа). Пусть $T_x,\ x\in\mathbb{R}^d$ – d-динамическая система и $\psi=\psi(\omega)\in L_1(\Omega)$. Тогда почти для всех $\omega\in\Omega$ реализация $\psi(T_{\hat{x}}\omega)$ имеет пространственное среднее $M\big(\psi(y,T_x\omega)\big)$ в $\mathbb{R}^d$. Более того, $M\big(\psi(T_x\omega)\big)$ – инвариантная функция и

$$\mathbb{E}(\psi)\equiv\int\limits_{\Omega}\psi(\omega)\,d\mu=\int\limits_{\Omega}M\big(\psi(T_x\omega)\big)\,d\mu,$$

где $\mathbb{E}(\psi)$ – математическое ожидание от ψ. В частности, если T_x – эргодическая, то почти для всех $\omega\in\Omega$ выполняется тождество

$$\mathbb{E}(\psi)=M\big(\psi(T_x\omega)\big).$$

Сформулируем предположения относительно случайных полей $F\big(\hat{\xi},\omega\big)$, $p\big(\hat{\xi},\omega\big)$ и $q\big(\hat{\xi},\omega\big)$, которые используются в определениях стохастической геометрии и коэффициентов в граничном условии Фурье. Прежде всего, предполагается, что случайные поля являются статистически однородными, то есть

$$F(\hat{\xi},\omega)=\mathrm{F}(T_{\hat{\xi}}\,\omega),\quad p(\hat{\xi},\omega)=\rho(T_{\hat{\xi}}\,\omega),\quad q(\hat{\xi},\omega)=\varrho(T_{\hat{\xi}}\,\omega),\quad \forall\hat{\xi}\in\mathbb{R}^{d-1},$$

где F, ρ и ϱ – случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, а

$T_{\hat{x}}$ – эргодическая $(d-1)$-динамическая система на Ω.

Кроме того, предполагается, что почти наверное реализация F является непрерывно дифференцируемой или локально липщицевой функцией.

Введем обозначения

$$\partial_\omega^i\mathrm{F}(\omega)=\partial_{\xi_i}\mathrm{F}(T_{\hat{\xi}}\,\omega)|_{\hat{\xi}=0},\quad \partial_\omega\mathrm{F}(\omega)=\nabla_{\hat{\xi}}\mathrm{F}(T_{\hat{\xi}}\,\omega)|_{\hat{\xi}=0}.$$

Имеем, что $\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{\xi}, \omega) = \partial_\omega \mathrm{F}(T_{\hat{\xi}}\, \omega)$ (смотри, например [29, с. 3-262]).

Наконец, мы сделаем следующие предположения относительно функций F, ρ и ϱ

(h1) $\mathrm{F} \in L_\infty(\Omega)$, $\mathrm{F}(\omega) \le 0$ почти наверное.

(h2) $\partial_\omega \mathrm{F} \in (L_2(\Omega))^{d-1}$.

(h3) $\rho \in L_\infty(\Omega)$, $\tilde{p}(\omega) \ge 0$ почти наверное, $\mu\{\omega : \tilde{p}(\omega) > 0\} > 0$.

(h4) $\varrho \in L_2(\Omega)$, $\varrho \partial_\omega \tilde{F} \in (L_2(\Omega))^{d-1}$.

Некоторые утверждения, сформулированные в данной работе, справедливы при более строгом условии положительности для ρ, чем условие (h3). Это более сильное условие сформулируется следующим образом

(h3') $p^- \le \rho(\omega) \le p^+$ почти наверное, где p^- и p^+ – детерминированные константы, причем $p^- > 0$.

Также в ряде утверждений мы предполагаем, что выполняется

(h2') $\partial_\omega \mathrm{F} \in (L_2(\Omega))^{d-1}$, если $d < 5$; $\partial_\omega \mathrm{F} \in (L_{d/2}(\Omega))^{d-1}$, если $d \ge 5$.

2 УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТИ С ЛОКАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

2.1 Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с гладкой границей, где Ω лежит на полуплоскости $\{x_d > 0\}$ и $\Gamma_1 \subset \{x : x_d = 0\}$. Зададим гладкую неположительную 1 – периодическую по $\hat{\xi}$ функцию $F(\hat{x}, \hat{\xi})$, $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}), \hat{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})$, и определим область Ω_ε следующим образом: $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1^\varepsilon = \left\{x = (\hat{x}, x_d) : (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d = \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right\}$, $0 < \alpha < 1$. То есть мы добавили к области Ω тонкий осциллирующий слой $\Pi_\varepsilon = \left\{x = (\hat{x}, x_d) : (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d \in \left[0, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right)\right\}$. Нами предполагается, что $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ имеет компактный носитель на Γ_1 по переменной $\hat{\xi}$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\beta p\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = \varepsilon^{1-\alpha} g\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}\right), & x = (\hat{x}, x_d) \in \Gamma_1^\varepsilon, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u^1, \ldots, u^n)^\top$ – неизвестная вектор-функция;

$f = (f^1, \ldots, f^n)^\top$ – заданная нелинейная функция;

$h = (h^1, \ldots, h^n)^\top$ – заданная вектор-функция, а

λ – $n \times n$ – матрица с постоянными коэффициентами, имеющая положительную симметрическую часть, то есть $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^\top) \geq \varpi I$, $\varpi > 0$ (здесь I – единичная матрица размерности $n \times n$). Положим что, $p(\hat{x}, \hat{\xi}) = \operatorname{diag}\{p^1, \ldots, p^n\}$, $g(\hat{x}, \hat{\xi}) = (g^1, \ldots, g^n)^\top$ – непрерывные, 1-периодические по $\hat{\xi}$ и $p^i(\hat{x}, \hat{\xi})$, $i = 1, \ldots, n$, положительные функции. Здесь $\frac{\partial}{\partial \nu} := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} N_k, i = 1, \ldots, n$ и $N = (N_1, \ldots, N_d)$ единичная внешняя нормаль к границе области. Обозначим через $p_{\max}$ максимум по $x \in \Gamma_1$ и i функций p^i.

Функция $a(x, \xi) \in C\left(\overline{\Omega}_\varepsilon \times \mathbb{R}^d\right)$ такая, что $0 < a_0 \leq a(x, \xi) \leq A_0$ с некоторыми константами a_0, A_0. Предполагаем, что функция $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеет среднее $\overline{a}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{\infty,*w}(\Omega)$, то есть

$$\int_{\Omega} a\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \to \int_{\Omega} \overline{a}(x)\varphi(x)dx \quad (\varepsilon \to 0+) \tag{2.1.2}$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$ и для всех $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через V (соответственно V_ε) пространство Соболева $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ (соответственно $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_2)$), то есть пространство функций из пространства Соболева $H^1(\Omega)$ (соответственно $H^1(\Omega_\varepsilon)$) с нулевым следом на Γ_2. Обозначим через V' (соответственно V'_ε) сопряжённое пространство для V (соответственно V_ε), то есть пространство ограниченных линейных функционалов на V (соответственно V_ε). Обозначим через Ω^+ область, которая $\Omega_\varepsilon \subset \Omega^+$ для всех ε. Для вектор-функции $h(x,\xi)$ предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ функции $h_\varepsilon^i(x) = h^i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(\Omega^+)$ и имеют средние $\overline{h^i}(x)$ в пространстве $L_2(\Omega^+)$ при $\varepsilon \to 0+$, то есть

$$h^i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \overline{h^i}(x) \quad (\varepsilon \to 0+) \ \text{ слабо в } \ L_2(\Omega_\varepsilon),$$

или

$$\int_{\Omega^+} h^i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \to \int_{\Omega^+} \overline{h^i}(x)\varphi(x)dx \quad (\varepsilon \to 0+) \tag{2.1.3}$$

для любой функции $\varphi \in L_2(\Omega)$ и для всех $i = 1, \dots, n$.

Из условия (2.1.3) следует, что норма функции $h_\varepsilon^i(x)$ равномерно ограничена по ε в пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$, то есть

$$\| h_\varepsilon^i(x) \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le M_0, \quad \forall \varepsilon \in (0,1]. \tag{2.1.4}$$

Преполагается, что вектор-функция $f(v) \in [C(\mathbb{R}^n)]^n$ удовлетворяет следующим неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \le C_0\left(\sum_{i=1}^{n} |v^i|^{p_i} + 1\right), \quad 2 \le p_1 \le \dots \le p_{n-1} \le p_n, \tag{2.1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i |v^i|^{p_i} - C \le \sum_{i=1}^{n} f^i(v)v^i, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1.6}$$

где $\gamma_i > 0$ при всех $i = 1, \dots, n$. Неравенство (2.1.5) обусловлено тем, что в реальных системах реакции-диффузии функции $f^i(u)$ является полиномами, возможно, с разными степенями. Неравенство (2.1.6) называется условием диссипативности для системы уравнений реакции-диффузии (2.1.1). В простейшем модельном случае $p_i \equiv p$ для любого $i = 1, \dots, n$, в этом случае условия (2.1.5) и (2.1.6) сводятся к следующим неравенствам

$$|f(v)| \leq C_0(|v|^{p-1} + 1), \quad \gamma|v|^p - C \leq f(v)v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.7}$$

Заметим, что выполнение условия Липщица для функции $f(v)$ относительно переменной v не предполагается.

Замечание 2.1.1. Используемые методы позволяют также исследовать системы, в которых нелинейные члены имеют вид $\sum_{j=1}^{m} a_j\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f_j(u)$, где a_j – матрицы, элементы которых усредняются, а $f_j(u)$ – полиномиальные векторы от u удовлетвоярющие условиям вида (2.1.5)–(2.1.6). Для краткости рассматривается случай $m = 1$ и $a_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) I$, где I – единичная матрица.

Введем обозначения

$$G(\hat{x}) = \int\limits_{[0,1)^{d-1}} \sqrt{|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})|^2}\, g\big(\hat{x}, \hat{\xi}\big) d\hat{\xi}, \tag{2.1.8}$$

$$P(\hat{x}) = \int\limits_{[0,1)^{d-1}} \sqrt{|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})|^2}\, p\big(\hat{x}, \hat{\xi}\big) d\hat{\xi}. \tag{2.1.9}$$

Заметим, что в силу положительности p функция $P(\hat{x})$ также положительна. Имеются следующие сходимости (смотри [3, p. 213-233]):

$$\varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g^i\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \cdot v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds \to \int\limits_{\Gamma_1} G^i(\hat{x}) \cdot v(x)\, ds \tag{2.1.10}$$

и

$$\varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p^i\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds \to \int\limits_{\Gamma_1} P^i(\hat{x}) v(x)\, ds \tag{2.1.11}$$

для любого $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь ds является элементом $(d-1)$-мерной меры на гиперповерхности.

Введём обозначения для пространств $\mathrm{H} := [L_2(\Omega)]^n$, $\mathrm{H}_\varepsilon := [L_2(\Omega_\varepsilon)]^n$, $\mathrm{V} := [H^1(\Omega, \Gamma_2)]^n$, $\mathrm{V}_\varepsilon := [H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_2)]^n$. Нормы в этих пространствах определяются как

$$\| v \|^2 := \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |v^i(x)|^2 dx, \qquad \| v \|_{\varepsilon}^2 := \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} |v^i(x)|^2 dx,$$

$$\| v \|_1^2 := \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |\nabla v^i(x)|^2 dx, \qquad \| v \|_{1,\varepsilon}^2 := \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} |\nabla v^i(x)|^2 dx.$$

Обозначим через V' сопряжённое пространство к пространству V, и через V_ε' сопряжённое пространство к пространству V_ε.

Пусть $q_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Введём векторные обозначения $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $q = (q_1, \dots, q_n)$, также определим пространства

$$\mathrm{L}_p := L_{p_1}(\Omega) \times \dots \times L_{p_n}(\Omega), \qquad \mathrm{L}_{p,\varepsilon} := L_{p_1}(\Omega_\varepsilon) \times \dots \times L_{p_n}(\Omega_\varepsilon),$$

$$\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}_p) := L_{p_1}\left(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(\Omega)\right) \times \dots \times L_{p_n}\left(\mathbb{R}_+; L_{p_n}(\Omega)\right),$$

$$\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}_{p,\varepsilon}) := L_{p_1}\left(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(\Omega_\varepsilon)\right) \times \dots \times L_{p_n}\left(\mathbb{R}_+; L_{p_n}(\Omega_\varepsilon)\right).$$

Как и в [33, p. 3-362; 42], мы изучаем слабые решения начально-краевой задачи (2.1.1), то есть функции

$$u_\varepsilon(x,t) \in \mathrm{L}_\infty^{loc}(R_+; \mathrm{H}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(R_+; \mathrm{V}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_p^{loc}\left(R_+; \mathrm{L}_{p,\varepsilon}\right)$$

удовлетворяющие уравнению (2.1.1) в обобщённом смысле. Это означает, что выполняется следующее интегральное тождество

$$\begin{aligned} &- \int\limits_{\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dxdt + \int\limits_{\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} \lambda \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi\, dxdt + \\ &+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} a_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon) \cdot \psi\, dxdt + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon \times \mathbb{R}_+} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon \cdot \psi\, dsdt = \\ &= \int\limits_{\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} h_\varepsilon(x) \cdot \psi\, dxdt + \varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon \times \mathbb{R}_+} g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \cdot \psi\, dsdt \qquad (2.1.12) \end{aligned}$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{C}_0^\infty\left(R_+; \mathrm{V}_\varepsilon \cap \mathrm{L}_{p,\varepsilon}\right)$. Здесь $y_1 \cdot y_2$ означает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

Если $u_\varepsilon(x,t) \in \mathrm{L}_p\left(0, M; \mathrm{L}_{p,\varepsilon}\right)$, то из условия (2.1.5) следует, что $f\left(u(x,t)\right) \in \mathrm{L}_q\left(0, M; \mathrm{L}_{q,\varepsilon}\right)$. Поэтому для произвольного слабого решения $u_\varepsilon(x,s)$ задачи (2.1.1) выполняется

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial t} \in \mathrm{L}_q\big(0,M;\mathrm{L}_{q,\varepsilon}\big) + \mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{V}'_\varepsilon).$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что

$$\mathrm{L}_q\big(0,M;\mathrm{L}_{q,\varepsilon}\big) + \mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{V}'_\varepsilon) \subset \mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{H}_\varepsilon^{-r}),$$

где пространство $\mathrm{H}_\varepsilon^{-r} := H^{-r_1}(\Omega_\varepsilon) \times \ldots \times H^{-r_n}(\Omega_\varepsilon)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ и индексы $r_i = \max\left\{1, d\left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{2}\right)\right\}$ при $i = 1, \ldots, n$. Здесь $H^{-r}(\Omega_\varepsilon)$ обозначает пространство, сопряжённое к пространству Соболева $H_0^r(\Omega_\varepsilon)$ с индексом $r > 0$ в области Ω_ε.

Поэтому для любого слабого решения $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (2.1.1) ее производная по времени $\frac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial t}$ принадлежит $\mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{H}_\varepsilon^{-r})$.

Замечание 2.1.2. Существование слабого решения $u(x,t)$ задачи (2.1.1) для любых начальных данных $U \in H_\varepsilon$ и фиксированного ε может быть доказано стандартным способом (смотри, например, [32, с. 3-291; 42, p. 49-75]). Это решение может быть неединственным, поскольку функция $f(v)$ удовлетворяет только условиям (2.1.5), (2.1.6) и не предполагается выполнение условия Липщица по переменной v.

Следующая лемма доказывается аналогично утверждению XV.3.1 из [33, p. 3-362].

Лемма 2.1.1. Пусть $u_\varepsilon(x,t) \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;V_\varepsilon) \cap L_p^{loc}\big(\mathbb{R}_+;L_{p,\varepsilon}\big)$ является слабым решением задачи (2.1.1). Тогда

(i) $u_\varepsilon \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}_\varepsilon)$;

(ii) функция $\| u_\varepsilon(\cdot,t) \|^2$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$, и более того, выполняется равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_\varepsilon(\cdot,t) \|^2 + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \lambda \nabla u_\varepsilon(x,t) \cdot \nabla u_\varepsilon(x,t)dx +$$
$$+\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon(x,t)) \cdot u_\varepsilon(x,t)dx + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x,t) \cdot u_\varepsilon(x,t)\,ds =$$
$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} h_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x,t)dx + \varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \cdot u_\varepsilon(x,t)ds, \qquad (2.1.13)$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 2.2.10 Все решения $u_\varepsilon(t)$ задачи (2.2.8) удовлетворяют нервенству

$$\| u_\varepsilon(t) \|_\varepsilon^2 \le \| u_\varepsilon(0) \|_\varepsilon^2 \, e^{-\varkappa_1 t} + R_1^2, \qquad (2.1.14)$$

$$\varpi \int_t^{t+1} \| u_\varepsilon(s) \|_{\varepsilon,1}^2 \, ds + 2a_0 \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_t^{t+1} \| u_\varepsilon^i(s) \|_{L_{p_i}(\Omega_\varepsilon)}^{p_i} \, ds +$$

$$+2p_{\max}\varepsilon^{1-\alpha} \int_t^{t+1} \| u_\varepsilon(s) \|_{\mathrm{L}_2(\Gamma_1^\varepsilon)}^2 \, ds \leq \| u_\varepsilon(t) \|_\varepsilon^2 + R_2^2, \qquad (2.1.15)$$

где $\varkappa_1 > 0$ – константа, не зависящая от ε. Положительные величины R_1 и R_2 зависят от M_0 (смотри (2.1.4)), но не зависят от $u_\varepsilon(0)$ и ε.

Доказательство. Приведём краткий набросок доказательтва (подробности можно найти в [17, с. 103-157]).

В правой части (2.1.13) интеграл по части границы Γ_1^ε неотрицателен, поскольку матрица p положительна. Интрегрируем (2.1.13) по времени t. Для оценки слагаемых

$$\varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g \cdot w ds \qquad \text{и} \qquad \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p u_\varepsilon \cdot w ds$$

используем неравенство Коши и компактность вложения $\mathrm{L}_2(\Gamma_1^\varepsilon) \Subset \mathrm{V}_\varepsilon$. Для остальных слагаемых применяются стандартные методы (смотри [43]). Лемма доказана.

Для определения пространства траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (2.1.1), мы используем общий подход из подраздела 1.1. Для любого $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$ рассмотрим банаховы пространства

$$\mathcal{F}_{t_1,t_2} := \mathrm{L_p}(t_1, t_2; \mathrm{L_p}) \cap \mathrm{L}_2(t_1, t_2; \mathrm{V}) \cap \mathrm{L}_\infty(t_1, t_2; \mathrm{H}) \cap\cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L_q}(t_1, t_2; \mathrm{H}^{-r}) \right\}$$

с нормами

$$\| v \|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} := \| v \|_{\mathrm{L_p}(t_1,t_2;\mathrm{L_p})} + \| v \|_{\mathrm{L}_2(t_1,t_2;\mathrm{V})} + \| v \|_{\mathrm{L}_\infty(0,M;\mathrm{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathrm{L_q}(t_1,t_2;\mathrm{H}^{-r})}.$$

Определим $\mathcal{D}_{t_1,t_2} = \mathrm{L_q}(t_1, t_2; \mathrm{H}^{-r})$, получим $\mathcal{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1,t_2}$ и для $u(t) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$ имеем $A(u(t)) \in \mathcal{D}_{t_1,t_2}$. Слабые решения задачи (2.1.1) рассматриваются согласно общей схеме подраздела 1.1.

Рассмотрим пространства

$$\mathcal{F}_+^{loc} = \mathrm{L_p}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{L_p}) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{V}) \cap \mathrm{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L_q}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}^{-r}) \right\},$$

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc} = \mathrm{L_p}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}_{\mathrm{p},\varepsilon}) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{V}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L_q}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_\varepsilon^{-r}) \right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (2.1.1). Для любого $U \in \mathrm{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, такая что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ для задачи (2.1.1) не пусто и достаточно велико.

Легко видеть, что $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$ и пространство $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ инвариантно относительно сдвига, то есть, если $u(t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, то и $u(\tau + t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для всех $\tau \geq 0$. Следовательно, $S(\tau)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для всех $\tau \geq 0$. Определим метрики $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ с помощью нормы из $\mathrm{L}_2(t_1, t_2; \mathrm{H})$, получим

$$\rho_{t_1,t_2}(u, v) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \| u(t) - v(t) \|_{\mathrm{H}}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}.$$

Топология Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{loc}$ порождается этими метриками. Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \to \infty$ в топологии Θ_+^{loc}, если выполняется $\| v_k(\cdot) - v(\cdot) \|_{\mathrm{L}_2(t_1,t_2;\mathrm{H})} \to 0 \ (k \to \infty)$ для всех $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Учитывая (1.1.2), заключаем, что топология Θ_+^{loc} является метризуемой. Мы рассматриваем эту топологию в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (2.1.1). Аналогично определяется топология $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$.

Рассмотрим трансляционную полугруппу $\{S(\tau)\}$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+, S(\tau): \mathcal{K}_\varepsilon^+ \to \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $\tau \geq 0$. Трансляционная полугруппа $\{S(\tau)\}$, действуйющая на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, является непрерывной в топологии $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$.

Используя схему подраздела 1.1, можно определить ограниченные множества в пространстве $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ с помощью банахова пространства $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$. Естественным образом получаем

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b = \mathrm{L}_\mathrm{p}^b\big(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}_{\mathrm{p},\varepsilon}\big) \cap \mathrm{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathrm{V}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \ \Big| \ \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L}_\mathrm{q}^b(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_\varepsilon^{-r}) \right\}$$

и пространство $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$ является подпространством $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ – ядро задачи (2.1.1), состоящее из всех слабых решений $u(t), t \in \mathbb{R}$, ограниченных в

$$\mathcal{F}_\varepsilon^b = \mathrm{L}_\mathrm{p}^b\big(\mathbb{R}; \mathrm{L}_{\mathrm{p},\varepsilon}\big) \cap \mathrm{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathrm{V}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}; \mathrm{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \ \Big| \ \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L}_\mathrm{q}^b(\mathbb{R}; \mathrm{H}_\varepsilon^{-r}) \right\}.$$

Утверждение 2.1.1. Задача (2.1.1) имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ ограничено в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$ и компактно в $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Более того, $\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+\mathcal{K}_\varepsilon$, ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ не пусто и ограничено в $\mathcal{F}_\varepsilon^b$.

Для доказательства этого утверждения используется подход из [33, p. 3-

362]. Для доказательства существования поглощающего множества (ограниченного в $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$ и компактного в $\Theta^{loc}_{\varepsilon,+}$) можно воспользоваться леммой 2.1.2. Напомним, что пространства $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$ и $\Theta^{loc}_{\varepsilon,+}$ зависят от ε.

Легко проверить, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subset \mathcal{B}_0(R)$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Здесь $\mathcal{B}_0(R)$ – шар в $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$ с достаточно большим радиусом R. В силу леммы Обена-Лионса-Саймона имеем

$$\mathcal{B}_0(R) \Subset \mathrm{L}_2^{loc}\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_\varepsilon^{1-\delta}\right), \tag{2.1.16}$$

$$\mathcal{B}_0(R) \Subset \mathrm{C}^{loc}\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_\varepsilon^{-\delta}\right), \quad 0 < \delta \le 1. \tag{2.1.17}$$

Учитывая компактные вложения (2.1.16) и (2.1.17) свойства притяжения к построенному траекторному аттрактору можно усилить.

Следствие 2.1.1. Для любого множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}^+_\varepsilon$, ограниченного в $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$, получаем

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{L}_2(0,M;\,\mathrm{H}_\varepsilon^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathcal{K}_\varepsilon\right) \to 0,$$

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\,\mathrm{H}_\varepsilon^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathcal{K}_\varepsilon\right) \to 0 \;\; (\tau \to \infty),$$

где M – произвольная положительная постоянная.

Напомним, что $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$ и Ω лежат в положительном полупространстве $\{x_d > 0\}$. Следовательно, любая функция $u(x,t)$, зависящая от $x \in \Omega_\varepsilon$, принадлежит пространству $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$, а ее сужение на область Ω, принадлежит пространству $\mathcal{F}^b_+$, и, более того

$$\| u \|_{\mathcal{F}^b_+} \le \| u \|_{\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}}.$$

Используя это наблюдение, получаем следующее следствие.

Следствие 2.1.2. Траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ равномерно по $\varepsilon \in (0,1)$ ограничены в $\mathcal{F}^b_+$. Ядра $\mathcal{K}_\varepsilon$ равномерно по $\varepsilon \in (0,1)$ ограничены в $\mathcal{F}^b$.

2.2 Вспомагательные леммы

Лемма 2.2.1. Существуют константы C_1, C_2 такие, что для любого $v \in \mathrm{V}_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\left\| v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) - v(\hat{x}, 0) \right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n} \le C_1 \sqrt{\varepsilon^\alpha} \, \| v \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}, \tag{2.2.1}$$

$$\| v \|_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \le C_2 \sqrt{\varepsilon^\alpha} \, \| v \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Для простоты докажем лемму в случае, когда система состоит из одного уравнения. Без ограничения общности будем считать, что $v \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Заметим, что

$$v(\hat{x}, y) - v(\hat{x}, 0) \le \int_0^y \frac{\partial v(\hat{x}, t)}{\partial x_n} dt$$

для любой точки $(\hat{x}, y) \in \overline{(\Omega_\varepsilon \backslash \Omega)}$. Тогда

$$|v(\hat{x}, y) - v(\hat{x}, 0)|^2 = \left| \int_0^y \frac{\partial v(\hat{x}, t)}{\partial x_n} dt \right|^2 \le y \int_0^y \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dt.$$

Подставляя $y = \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)$ и интегрируя по Γ_1, получаем (2.2.1). Далее, для $(\hat{x}, y) \in \overline{(\Omega_\varepsilon \backslash \Omega)}$ справедливо неравенство:

$$v^2(\hat{x}, y) \le 2v^2(\hat{x}, 0) + 2\left(\int_0^y \frac{\partial v(\hat{x}, t)}{\partial x_n} dt\right)^2 \le$$

$$\le 2v^2(\hat{x}, 0) + 2\varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \int_0^{\varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dt$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma_1} d\hat{x} \int_0^{\varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)} v^2(\hat{x}, y) dy \le 2\varepsilon^\alpha \max F \parallel v \parallel_{L_2(\Gamma_1)}^2 +$$

$$+ \varepsilon^{2\alpha} \max F^2 \int_0^{\varepsilon^\alpha F(\hat{x}, \hat{x}/\varepsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dt$$

Это и доказывает (2.2.2). Лемма доказана.

Лемма 2.2.2. Пусть ds – элемент $(d-1)$-мерного объема поверхности Γ_1^ε. Тогда

$$ds = \left(\sqrt{1 + \varepsilon^{2-2\alpha} \left| \nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right) \right|^2} \Bigg|_{\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \right) d\hat{x} \left(1 + O(\varepsilon)\right) =$$

$$= \varepsilon^{\alpha - 1} \left(\sqrt{\left| \nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right) \right|^2} \Bigg|_{\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{1-\alpha}) \right) d\hat{x}. \qquad (2.2.3)$$

Доказательство. В силу наших предположений поверхность Γ_1^ε задаётся уравнением

$$x_n - \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$ds = \sqrt{\left(\varepsilon^\alpha F'_{x_1} + \varepsilon^{\alpha-1} F'_{\xi_1}\right)^2 + \cdots + \left(\varepsilon^\alpha F'_{x_{n-1}} + \varepsilon^{\alpha-1} F'_{\xi_{n-1}}\right)^2 + 1}\ d\hat{x},$$

где $\hat{\xi} = \hat{x}/\varepsilon$. Прямые вычисления показывают, что

$$\sqrt{\varepsilon^{2\alpha}|\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\nabla_{\hat{x}} F, \nabla_{\hat{\xi}} F\right) + \varepsilon^{2\alpha-2}\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\right|^2 + 1} - \sqrt{1 + \varepsilon^{2\alpha-2}\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\right|^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon^{2\alpha}|\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\nabla_{\hat{x}} F, \nabla_{\hat{\xi}} F\right)}{\sqrt{\varepsilon^{2\alpha}|\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\nabla_{\hat{x}} F, \nabla_{\hat{\xi}} F\right) + \varepsilon^{2\alpha-2}\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\right|^2 + 1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{2\alpha-2}\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\right|^2}} =$$

$$= O(\varepsilon^\alpha)$$

и

$$\sqrt{\varepsilon^{2\alpha}|\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\nabla_{\hat{x}} F, \nabla_{\hat{\xi}} F\right) + \varepsilon^{2\alpha-2}\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\right|^2 + 1} - \varepsilon^{\alpha-1}\sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right)\right|^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon^{2\alpha}|\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\nabla_{\hat{x}} F, \nabla_{\hat{\xi}} F\right) + 1}{\sqrt{\varepsilon^{2\alpha}|\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\nabla_{\hat{x}} F, \nabla_{\hat{\xi}} F\right) + \varepsilon^{\alpha-1}\varepsilon^{2\alpha-2}\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\right|^2 + 1} + \sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})\right|^2}} \leq$$

$$\leq C\left(1 + O(\varepsilon^\alpha)\right) = \varepsilon^{\alpha-1} O(\varepsilon^{1-\alpha}),$$

где константа C не зависит от ε.

Эти неравенства доказывают формулу (2.2.3). Лемма доказана.

Утверждение 2.2.1. Равномерно по $u, v \in [H^{1/2}(\Gamma_1)\,]^n$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} u \cdot v\, d\hat{x}\right| \leq C_3 \parallel u \parallel_{[H^{1/2}(\Gamma_1)]^n} \parallel v \parallel_{[H^{1/2}(\Gamma_1)]^n}.$$

Доказательство. Это неравенство является прямым следствием неравенства Коши-Буняковского-Шварца и компактности вложения $L_2(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$.

Лемма 2.2.3. Существует такая положительная константа C_4, независящая от ε, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^2 dx + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v \cdot v\, ds \geq C_4 \parallel v \parallel_{\mathrm{V}_\varepsilon}$$

для любого $v \in \mathrm{V}_\varepsilon$.

Доказательство. В силу (2.2.1) и леммы 2.2.2, имеем

$$\varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v^2 \left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds \leq c\varepsilon^\beta \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} v^2 \left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) d\hat{x} \leq$$
$$\leq c' \left(\varepsilon^{\beta-1+\alpha} \parallel v \parallel_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \varepsilon^{\beta-\frac{3}{2}+\alpha} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2\right) \leq c'' \varepsilon^{\beta-1+\alpha} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2$$

Далее, утверждение леммы вытекает из неравенства типа Фридрихса (смотри [44]). Лемма доказана.

Лемма 2.2.4. Пусть $h(\hat{x}, \hat{\xi})$ – *1*-периодическая по переменной ξ липшицева функция такая, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 h(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \equiv 0. \tag{2.2.4}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Gamma_1} h\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u(\hat{x}) v(\hat{x}) d\hat{x} \right| \leq C_5 \sqrt{\varepsilon} \parallel u \parallel_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \parallel v \parallel_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}. \tag{2.2.5}$$

Доказательство. В силу (2.2.4) уравнение

$$\Delta_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) = h(\hat{x}, \hat{\xi})$$

разрешимо в пространстве 1-периодических по $\hat{\xi}$ функций. Решение единственно с точностью до константы.

Предположим сначала, что $v(\hat{x}, 0)$ и $u(\hat{x}, 0) \in H^1(\Gamma_1)$, а $h(\hat{x}, \hat{\xi}) \in C^1$. Подставляя $h(\hat{x}, \hat{\xi}) = \Delta_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi})$, интегрируя по частям и применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получим

$$\left|\int_{\Gamma_1} h\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u(\hat{x})v(\hat{x})d\hat{x}\right| = \left|\int_{\Gamma_1} \Delta_{\hat{\xi}}\Psi(\hat{x},\hat{\xi})|_{\hat{\xi}=\hat{x}/\varepsilon}u(\hat{x})v(\hat{x})d\hat{x}\right| =$$

$$= \left|\int_{\Gamma_1} \left(\varepsilon\nabla_{\hat{x}}\left[\nabla_{\hat{\xi}}\Psi(\hat{x},\hat{\xi})|_{\hat{\xi}=\hat{x}/\varepsilon}\right] - \varepsilon\left((\nabla_{\hat{x}},\nabla_{\hat{\xi}})\Psi(\hat{x},\hat{\xi})\right)|_{\hat{\xi}=\hat{x}/\varepsilon}\right)u(\hat{x})v(\hat{x})d\hat{x}\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\left|\int_{\Gamma_1}\left(\nabla_{\hat{\xi}}\Psi\left(\hat{x},\hat{\xi}\right)|_{\hat{\xi}=\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}, \nabla_{\hat{x}}(uv)\right)d\hat{x}\right| + \varepsilon\left|\int_{\Gamma_1}\left(\left(\nabla_{\hat{x}},\nabla_{\hat{\xi}}\right)\Psi\left(\hat{x},\hat{\xi}\right)\right)|_{\hat{\xi}=\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}uvd\hat{x}\right|$$

$$\leq C_6\varepsilon \parallel u \parallel_{H^1(\Gamma_1)}\parallel v \parallel_{H^1(\Gamma_1)}. \qquad (2.2.6)$$

Далее, аппроксимируя произвольную липшицеву функцию $h(\hat{x},\hat{\xi})$ последовательностью функций класса C^1, мы распространяем полученное неравенство на пространство липшицевых функций. Очевидно, что константа C_6 зависит только от константы Липшица.

Пусть $p \in [0,1]$. Используя билинейную форму

$$\int_{\Gamma_1} h\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u(\hat{x})v(\hat{x})d\hat{x}, \;\; u,v \in H^p(\Gamma_1),$$

определим оператор $T_\varepsilon: H^p(\Gamma_1) \to H^{-p}(\Gamma_1)$ по формуле

$$\langle T_\varepsilon u, v\rangle = \int_{\Gamma_1} h\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u(\hat{x},0)v(\hat{x},0)d\hat{x}.$$

Из (2.2.6) следует, что

$$\parallel T_\varepsilon \parallel_{L\left(H^1(\partial\Omega),H^{-1}(\partial\Omega)\right)} \leq C_6\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\parallel T_\varepsilon \parallel_{L\left(L_2(\partial\Omega),L_2(\partial\Omega)\right)} \leq C_7,$$

где константа C_7 не зависит от ε.

Используя технику интерполяции пространств ([45, 46]), из предыдущих оценок получаем

$$\parallel T_\varepsilon \parallel_{L\left(H^p(\partial\Omega),H^{-p}(\partial\Omega)\right)} \leq C_7^{1-p}C_6^p\varepsilon^p. \qquad (2.2.7)$$

Подставляя $p = \frac{1}{2}$ в (2.2.7), получаем (2.2.5). Лемма доказана.

2.2.1 Сходимость решения эллиптических задач в критическом случае

Рассмотрим следующие вспомогательные эллиптические задачи:

$$\begin{cases} \lambda\Delta v_\varepsilon + h\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\beta p\left(\hat{x},\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon = \varepsilon^{1-\alpha} g\left(\hat{x},\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}\right), & x = (\hat{x}, x_d) \in \Gamma_1^\varepsilon, \\ v_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

и

$$\begin{cases} \lambda\Delta v_0 + \overline{h}(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \nu} + P(\hat{x}) v_0 = G(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, \\ v_0 = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

где $\overline{h}(x)$ определена в (2.1.3), $G(\hat{x})$ и $P(\hat{x})$ – в формулах (2.1.7) и (2.1.8).

Лемма 2.2.5. Для всех $v \in V_\varepsilon$ справедливы следующие неравенства

$$\left| \varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \cdot v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds - \int\limits_{\Gamma_1} G(\hat{x}) \cdot v(x) ds \right| \leq$$

$$\leq C_8\left(\varepsilon^{1-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right) \parallel v \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \tag{2.2.10}$$

$$\left| \varepsilon^\beta \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) \cdot v\left(\hat{x}, \varepsilon^\alpha F\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds - \int\limits_{\Gamma_1} P(\hat{x})\, v(x) \cdot v(x)\, ds \right|$$

$$\leq C_9\left(\varepsilon^{1-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right) \parallel v \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \tag{2.2.11}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Согласно лемме 2.2.2, имеем

$$\left| \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \varepsilon^{1-\alpha} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon F\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) ds - \int_{\Gamma_1} G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0)\, d\hat{x} \right| =$$

$$= \left| \int_{\Gamma_1} \varepsilon^{1-\alpha} g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) \times \varepsilon^{\alpha-1} \left(\sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right|^2} + O(\varepsilon^{1-\alpha}) \right) d\hat{x} \right.$$

$$\left. - \int_{\Gamma_1} G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) d\hat{x} \right| \le$$

$$\le \left| \int_{\Gamma_1} \left(g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right) \sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right|^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. - g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v(\hat{x}, 0) \sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right|^2} \right) d\hat{x} \right| +$$

$$+ \left| \int_{\Gamma_1} \left(g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v(\hat{x}, 0) \sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right|^2} - \int_{\Gamma_1} G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) \right) d\hat{x} \right| +$$

$$+ C_9 \varepsilon^{1-\alpha} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \qquad (2.2.12)$$

Введем обозначение $h(\hat{x}, \hat{\xi}) = \sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})\right|^2} g(\hat{x}, \hat{\xi}) - G(\hat{x})$. Тогда, согласно определению $G(\hat{x})$, получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 h(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \equiv 0.$$

Далее, неравенство (2.2.10) получается после оценки первого интеграла по лемме 2.2.1 и второго интеграла по лемме 2.2.4.

Доказательство неравенства (2.2.11) аналогично. Лемма доказана.

Замечание 2.2.1. В силу гладкости границы $\partial\Omega$ решение $v_0 \in H^2(\Omega)$ (смотри [43, с. 3-408]), а значит, оно может быть продолжено на Π_ε так, что $v_0 \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ (смотри [47]).

Лемма 2.2.6. Пусть $\beta = 1 - \alpha,$ а функции $F(\hat{x}, \hat{\xi})$, $g(\hat{x}, \hat{\xi})$, $p(\hat{x}, \hat{\xi})$ являются периодическими по ξ и гладкими. Матрица λ задана, а правая часть $h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет условиям (2.1.3) и (2.1.4). Пусть также $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ имеет компактный носитель $x \in \Gamma_1$ равномерно по $\hat{\xi}$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует единственное решение задачи (2.2.8) и имеет место оценка сходимости

$$\| v_\varepsilon - v_0 \|_{\mathbf{V}} \leq K_2\left(\sqrt{\varepsilon^\alpha} + \varepsilon^{1-\alpha}\right) \tag{2.2.13}$$

в пространстве V при $\varepsilon \to 0$, где v_0 – решение (2.2.9).

Доказательство. Существование и единственность v_ε и v_0 обеспечиваются положительностью $p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)$ (и $P(\hat{x})$) и леммой Лакса-Мильграма (смотри [48]). Далее, согласно (2.2.8) и (2.2.9), имеем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda \nabla(v_0 - v_\varepsilon) \cdot \nabla w dx + \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p(v_0 - v_\varepsilon) \cdot w ds =$$

$$= \int_{\Omega} \lambda \nabla v_0 \cdot \nabla w dx - - \int_{\Omega_\varepsilon} h \cdot w dx - \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g \cdot w ds + \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w ds =$$

$$= \int_{\Omega} \lambda \nabla v_0 \cdot \nabla w dx - \int_{\Omega_\varepsilon} h \cdot w dx - \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g \cdot w ds + \int_{\Pi_\varepsilon} \lambda \nabla v_0 \cdot \nabla w dx +$$

$$+ \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w ds = \int_{\Pi_\varepsilon} \lambda \nabla v_0 \cdot \nabla w dx - \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g \cdot w ds + \int_{\Gamma_1} G(\hat{x}) \cdot w ds -$$

$$- \int_{\Pi_\varepsilon} h \cdot w dx + \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w ds - \int_{\Gamma_1} P(\hat{x}) v_0 \cdot w ds.$$

Оценим все члены в правой части последнего равенства. Согласно (2.2.2) и учитывая гладкость v_0, имеем

$$\left| \int_{\Pi_\varepsilon} \lambda \nabla v_0 \cdot \nabla w dx \right| \leq \| \lambda \| \| \nabla v_0 \|_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \| w \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon^\alpha} \| v_0 \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \| w \|_{\mathrm{V}_\varepsilon},$$

а также

$$\left| \int_{\Pi_\varepsilon} h \cdot w dx \right| \leq \| h \|_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \| w \|_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon^\alpha} \| h \|_{\mathrm{H}_\varepsilon} \| w \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}.$$

Тогда, согласно лемме 2.2.5, справедливы следующие неравенства

$$\left| \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g \cdot w ds - \int_{\Gamma_1} G \cdot w ds \right| \leq C_4\left(\varepsilon^{1-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right) \| w \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}$$

и

$$\left| \varepsilon^{1-\alpha} \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w ds - \int\limits_{\Gamma_1} P v_0 \cdot w\, ds \right| \le C_5\left(\varepsilon^{1-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right) \parallel v_0 \parallel_{V_\varepsilon} \parallel w \parallel_{V_\varepsilon}.$$

С помощью этих неравенств получаем

$$\left| \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \lambda \nabla (v_0 - v_\varepsilon) \cdot \nabla w dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p(v_0 - v_\varepsilon) \cdot w ds \right| \le C_6\left(\varepsilon^{1-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right) \parallel w \parallel_{V_\varepsilon}.$$

Подставляя $w = v_0 - v_\varepsilon$, используя лемму 2.2.5 и неравенство типа Фридрихса (см. [44,с. 3-414], а также [49, p. 34138-1-34138-12; 50, p. 1-15]), получаем (2.2.13). Лемма доказана.

2.2.2 Сходимость решения эллиптических задач в субкритическом случае

Рассмотрим вспомогательные эллиптические задачи (2.2.8) и

$$\begin{cases} \lambda \Delta v_0 + \overline{h}(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \nu} = G(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, \\ v_0 = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.2.14}$$

где $\overline{h}(x)$ определена в (2.1.3), а $G(\hat{x})$ – в (2.1.7).

Лемма 2.2.7. Пусть $\beta > 1 - \alpha$, а функции $F(\hat{x}, \hat{\xi})$, $g(\hat{x}, \hat{\xi})$, $p(\hat{x}, \hat{\xi})$ – периодические по переменной ξ и гладкие. Матрица λ задана, $h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет условиям (2.1.3) и (2.1.4). Предположим, что $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ имеет компактный носитель по переменной $x \in \Gamma_1$ равномерно по ξ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ задача (2.2.8) имеет единственное решение и имеет место оценка сходимости

$$\parallel v_\varepsilon - v_0 \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le K_1 \left(\max\left(\varepsilon^{\beta-1+\alpha}, \varepsilon^{1-\alpha}, \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right)\right) \tag{2.2.15}$$

в пространстве V при $\varepsilon \to 0$, где v_0 – решение задачи (2.2.14).

Доказательство. Согласно лемме 2.2.3 и лемме Лакса-Мильграма ([48, p. 167-189; 51]), следует существование и единственность решения задачи (2.2.8). Продолжим функцию v_0на осциллирующий слой, сохраняя норму. После простых преобразований получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(v_0 - v_\varepsilon)\cdot\nabla w dx + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p(v_0 - v_\varepsilon)\cdot w ds =$$
$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v_0 \cdot \nabla w dx - \int_{\Omega_\varepsilon} h\cdot w dx - \varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\cdot w ds + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w ds =$$
$$= \int_{\Omega} \nabla v_0 \cdot \nabla w dx - \int_{\Omega_\varepsilon} h\cdot w dx - \varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\cdot w ds + \int_{\Pi_\varepsilon} \nabla v_0 \nabla \cdot w dx +$$
$$+\varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0\cdot w ds = \int_{\Pi_\varepsilon} \nabla v_0 \cdot \nabla w dx - \varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\cdot w ds +$$
$$+\int_{\Gamma_1} G(\hat{x})\cdot w ds - \int_{\Pi_\varepsilon} h\cdot w dx + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0\cdot w ds. \qquad (2.2.16)$$

Согласно лемме 2.2.2 и утверждению 2.2.1, последний интеграл в правой части (2.2.16) оценивается следующим образом

$$\varepsilon^\beta \left|\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w ds\right| = \varepsilon^\beta \left|\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p v_0 \cdot w \left[\varepsilon^{\alpha-1}\left(\sqrt{\left|\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x},\hat{\xi})\right|^2}\Big|_{\hat{\xi}=\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{1-\alpha})\right)\right] d\hat{x}\right| \le$$
$$\le \varepsilon^{\beta-1+\alpha} C_4 \left|\int_{\Gamma_1} p v_0 \cdot w d\hat{x}\right| \le \varepsilon^{\beta-1+\alpha} C_4 \parallel w \parallel_{H^{1/2}} (\Gamma_1) \le$$
$$\le \varepsilon^{\beta-1+\alpha} C_5 \parallel w \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Напомним, что в субкритическом случае $\beta - 1 + \alpha > 0$, следовательно, данный член стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

По (2.2.2), учитывая равномерную ограниченность $\parallel v_0 \parallel_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$, имеем

$$\left|\int_{\Pi_\varepsilon} \nabla v_0 \cdot \nabla w dx\right| \le \parallel \nabla v_0 \parallel_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \parallel w \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_6 \sqrt{\varepsilon^\alpha} \parallel v_0 \parallel_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \parallel w \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

и

$$\left|\int_{\Pi_\varepsilon} h\cdot w dx\right| \le \parallel h \parallel_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \parallel w \parallel_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \le C_6 \sqrt{\varepsilon^\alpha} \parallel h \parallel_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \parallel w \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Тогда из леммы 2.2.5 следует

$$\left|\varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\cdot w ds - \int_{\Gamma_1} G(\hat{x})\cdot w ds\right| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (2.2.17)$$

Объединяя эти неравенства и сходимость (2.2.17) с выражением (2.2.16), получаем

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(v_0 - v_\varepsilon)\cdot\nabla w dx\right| + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p(v_0 - v_\varepsilon)\cdot w ds \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Остаётся подставить $w = v_0 - v_\varepsilon$. Тогда из леммы 2.2.3 и неравенства типа Фридрихса (см., например [44, с. 3-414; 49, p. 34138-1-34138-12; 50, p. 1-15]) следует (2.2.15). Лемма доказана.

2.2.3 Сходимость решения эллиптических задач в суперкритическом случае

Рассмотрим, наконец, вспомогательные эллиптические задачи (2.2.8) и следующую задачу:

$$\begin{cases} \lambda\Delta v_0 + \overline{h}(x) = 0, & x \in \Omega, \\ v_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.18}$$

где $\overline{h}(x)$ задана в (2.1.3).

Обозначим

$$P_1(\varepsilon,\hat{x}) = \int\limits_{[0,1)^{d-1}} \sqrt{\varepsilon^{2-2\alpha} + |\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x},\hat{\xi})|^2}\, p(\hat{x},\hat{\xi}) d\hat{\xi},$$

Лемма 2.2.8. Для всех $u, v \in V_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\left|\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x}) u(x) v(x) d\hat{x} - \varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u(x)v(x) ds\right| \le$$

$$\le C_1\sqrt{\varepsilon^\alpha}\left(\|u\|_{V_\varepsilon}\|v\|_{[L_2(\Gamma)]^n} + \|u\|_{[L_2(\Gamma)]^n}\|v\|_{V_\varepsilon}\right) + \varepsilon^\alpha\|u\|_{V_\varepsilon}\|v\|_{V_\varepsilon} \le$$

$$\le C_1\sqrt{\varepsilon^\alpha}\|u\|_{V_\varepsilon}\|v\|_{V_\varepsilon}$$

где C_1 не зависит от ε.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.2.5.

Лемма 2.2.9. Пусть $\beta < 1-\alpha$, а функции $F(\hat{x},\hat{\xi}), g(\hat{x},\hat{\xi}), p(\hat{x},\hat{\xi})$ гладкие и периодичны по переменной ξ. Пусть λ – заданная матрица, $h\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ – правая часть, удовлетворяющая условию (2.1.3). Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (2.2.8) имеет единственное решение. Семейство решений равномерно ограничено в норме V_ε, и выполняется оценка

$$\| v_\varepsilon - v_0 \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K_3\left(\varepsilon^{1-\alpha-\beta} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right), \qquad (2.2.19)$$

где v_0 – решение задачи (2.2.18).

Если $\beta > 2 - \alpha$, то дополнительно

$$\| u_\varepsilon - u_0 \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K_3\left(\varepsilon^{\frac{\beta+\alpha-2}{2}} + \varepsilon^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.2.20)$$

где K_3 – константа, независящая от ε.

Доказательство. В случае положительной функции $p(\hat{x}, \hat{\xi})$ существование, единственность и равномерная ограниченность u_ε следует их стандартных энергетических оценок и леммы Лакса-Мильграма (смотри [52]).

Приведем интегральное тождество к следующему виду

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x)\nabla v(x)dx + \varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})u_\varepsilon(x)v(x)d\hat{x} = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x)v(x)dx +$$

$$+\left(\varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)v(x)ds - \int_{\Gamma_1} G(\hat{x})v(x)d\hat{x}\right) + \int_{\Gamma_1} G(\hat{x})v(x)d\hat{x} +$$

$$+\left(\varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})u_\varepsilon(x)v(x)d\hat{x} - \varepsilon^\beta\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)v(x)ds\right). \qquad (2.2.21)$$

После подстановки $v = u_\varepsilon$ и оценок по неравенству Коши-Буняковского и леммам 2.2.5 и 2.2.8 получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx + \varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})u_\varepsilon^2(x)d\hat{x} \leq$$
$$\leq \| f \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \| u_\varepsilon \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} +$$
$$+C\left(\left(\varepsilon^{1-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right) \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} +\right.$$
$$\left.+\varepsilon^{\beta+\alpha-\frac{3}{2}} \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \| u_\varepsilon \|_{L_2(\Gamma_1)} + \varepsilon^{\beta+\alpha-2} \| u_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right). \qquad (2.2.22)$$

Учитывая оценку $|P_1(\varepsilon,\hat{x}) - P(\hat{x})| \leq C\varepsilon^{1-\alpha}$, получаем оценку снизу

$$P_1(\varepsilon,\hat{x}) \geq C'_0 > 0. \qquad (2.2.23)$$

Далее, при $\beta > 2 - \alpha$ и достаточно малых ε имеем

$$C\left(\varepsilon^{\beta+\alpha-3/2} \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \| u_\varepsilon \|_{L_2(\Gamma_1} + \varepsilon^{\beta+\alpha-2} \| u_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx + \varepsilon^{\beta+\alpha-1}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})u_\varepsilon^2(x)d\hat{x};$$

где C – константа из (2.2.22). Тогда существование и единственность решения задачи (2.2.8), а также его равномерная ограниченность в норме V_ε следует из (2.2.21) , (2.2.22) и (2.2.23) с помощью стандартных рассуждений (смотри [52, с. 4-389]).

Чтобы доказать (2.2.19), разделим (2.2.22) на $\varepsilon^{\beta-1+\alpha}$, получим

$$\varepsilon^{1-\beta-\alpha}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx + \int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})u_\varepsilon^2(x)d\hat{x} \leq \varepsilon^{1-\beta-\alpha} \parallel f \parallel_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \parallel u_\varepsilon \parallel_{L_2(\Omega_\varepsilon)} +$$
$$+C\left(\left(\varepsilon^{2-2\alpha-\beta} + \varepsilon^{1-\beta-\frac{\alpha}{2}}\right) \parallel u_\varepsilon \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{1-\beta-\alpha} \parallel u_\varepsilon \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} +\right.$$
$$\left. + \sqrt{\varepsilon^\alpha} \parallel u_\varepsilon \parallel^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right). \qquad (2.2.24)$$

Из этого соотношения с учётом (2.2.23) и равномерной ограниченности нормы $\parallel u_\varepsilon \parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ выводим

$$\parallel u_\varepsilon \parallel_{L_2(\Gamma_1)} \leq \left(\varepsilon^{1-\beta-\alpha} + \sqrt{\varepsilon^\alpha}\right). \qquad (2.2.25)$$

Семейство $\{u_\varepsilon\}$ ограничено в $H^1(\Omega_\varepsilon)$, и, следовательно, слабо компактно в $H^{1/2}(\Omega)$. Рассмотрим произвольную сходящую подпоследовательность u_{ε_k} при $\varepsilon_k \to 0$. Очевидно, что предельная функция $u'(x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u'}{\partial t} = \lambda\Delta u' - \overline{a}(x)f(u') + \overline{h}(x)$ и, согласно (2.2.25), граничное условие $u'|_{\Gamma_1} = 0$. Следовательно, $u'(x) = u_0(x)$. Тогда все семейство $\{u_\varepsilon\}$ сходится и оценка (2.2.21) верна.

Оценка (2.2.20) выводится путем следующего преобразования

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx =$$
$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0)\, dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla(u_\varepsilon - u_0)\, dx - \int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega} \nabla u_0 \nabla(u_\varepsilon - u_0)\, dx =$$
$$= \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon - u_0)dx - \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(x,\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)ds - \int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u_0)dx +$$
$$+ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_n} u_0(u_\varepsilon - u_0)d\hat{x} - \int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega} \nabla u_0 \nabla(u_\varepsilon - u_0)dx +$$

$$+\varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\left(x,\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)(u_\varepsilon-u_0)ds$$

$$=\int_{\Omega_\varepsilon\backslash\Omega} f(u_\varepsilon-u_0)dx-\int_{\Omega_\varepsilon\backslash\Omega}\nabla u_0\nabla(u_\varepsilon-u_0)dx-$$

$$-\varepsilon^{\beta}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(x,\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^2\,ds+\varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g\left(x,\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)(u_\varepsilon-u_0)\,ds+$$

$$+\varepsilon^{\beta}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(x,\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon u_0\,ds+\int_{\Gamma_1} u_\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_n}u_0\,d\hat{x}. \qquad (2.2.26)$$

Лемма доказана.

В дальнейших рассуждениях будем использовать следующее утверждение, которое доказывается также, как и лемма 2.2.1.

Утверждение 2.2.2. Пусть $u(x)\in H^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда выполняется оценка

$$\left\|u\left(\hat{x},\varepsilon^\alpha F\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\right)-u(\hat{x},0)\right\|_{L_2(\Gamma_1)}\le C_5\varepsilon^\alpha\parallel u\parallel_{H^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Теперь, в случае неотрицательной функции $p(\hat{x},\hat{\xi})$, из (2.2.26) с помощью (2.2.19), лемм 2.2.1 и 2.2.2, утверждения 2.2.2, получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla(u_\varepsilon-u_0)|^2\,dx+\varepsilon^\beta\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(x,\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^2\,ds\le$$

$$\le C(\sqrt{\varepsilon^\alpha}\parallel f\parallel_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\parallel u_\varepsilon-u_0\parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}+\sqrt{\varepsilon^\alpha}\parallel u_0\parallel_{H^2(\mathbb{R}^n)}\parallel u_\varepsilon-u_0\parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon^{\beta-1+\alpha}\varepsilon\parallel u_0\parallel_{H^2(\mathbb{R}^m)}\left(\varepsilon^{\frac{1-\beta-\alpha}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)\parallel u_\varepsilon\parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}+$$

$$+\left(\varepsilon^{\frac{1-\beta-\alpha}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)\parallel u_\varepsilon\parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}+\varepsilon\parallel u_0\parallel_{H^2(\mathbb{R}^m)}).$$

Поскольку $\parallel u_\varepsilon\parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ равномерно ограничена, отсюда следует оценка

$$\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla(u_\varepsilon-u_0)|^2\,dx\le\left(\varepsilon^{1/4}+\varepsilon^{(1-\beta-\alpha)/2}+\varepsilon^{(\beta-1+3\alpha)/2}-\varepsilon^{\beta-1+9\alpha/4}\right),$$

откуда получаем (2.2.20).

В случае $\beta>2-\alpha$ начинаем с тождества

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_0-u_\varepsilon)|^2 dx + \varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})(u_0-u_\varepsilon)^2 d\hat{x} =$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u_0)\nabla(u_0-u_\varepsilon)dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_0-u_\varepsilon)dx - \varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(u_\varepsilon-u_0)ds +$$

$$+\varepsilon^{\beta}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} pu_0(u_0-u_\varepsilon)\, ds + \varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})(u_0-u_\varepsilon)^2 d\hat{x} -$$

$$-\int_{\Gamma_1^\varepsilon} p(u_0-u_\varepsilon)^2\, ds. \tag{2.2.27}$$

Затем, с учетом предположения $\beta > 2-\alpha$, по (2.2.23) и лемме 2.2.8 имеем

$$\left|\varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})(u_0-u_\varepsilon)^2 d\hat{x} - \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p(u_0-u_\varepsilon)^2\, ds\right| \le$$

$$\le \varepsilon^{\beta-1+\alpha} C\left(\sqrt{\varepsilon^\alpha}\parallel u_\varepsilon-u_0\parallel_{L_2(\Gamma_1)}\parallel u_\varepsilon-u_0\parallel_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^\alpha \parallel u_\varepsilon-u_0\parallel^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_0-u_\varepsilon)|^2 dx + \varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})(u_0-u_\varepsilon)^2 d\hat{x}\right)$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Объединяя это с (2.2.27), получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_0-u_\varepsilon)|^2 dx + \varepsilon^{\beta-1+\alpha}\int_{\Gamma_1} P_1(\varepsilon,\hat{x})(u_0-u_\varepsilon)^2 d\hat{x} \le$$

$$\le 2\left|\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_0\nabla(u_0-u_\varepsilon)dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_0-u_\varepsilon)dx - \varepsilon^{1-\alpha}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(u_\varepsilon-u_0)ds +\right.$$

$$\left. +\varepsilon^{\beta}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} pu_0(u_0-u_\varepsilon)\, ds\right|$$

Теперь (2.2.20) можно получить аналогично предыдущему случаю. Лемма доказана.

2.3 Усреднение системы уравнений реакции-диффузии и её траекторный аттрактор в критическом случае $(\beta = 1-\alpha)$

В этом подразделе мы изучаем поведение задачи (2.1.1) при $\varepsilon \to 0$ в критическом случае $\beta = 1-\alpha$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу с неоднородным граничным условием Фурье:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda\Delta u_0 - \overline{a}(x)f(u_0) + \overline{h}(x), & x \in \Omega, t > 0,\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} + P(\hat{x})u_0 = G(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, t > 0,\\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0,\\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0,\end{cases} \qquad (2.3.1)$$

Здесь функции $\overline{a}(x)$ и $\overline{h}(x)$ определены в (2.1.2) и (2.1.3), $G(\hat{x})$ и $P(\hat{x})$ определены в (2.1.7) и (2.1.8), соответственно.

Как и прежде, мы рассматриваем слабые решения задачи (2.3.1), то есть функции

$$u_0(x,t) \in \mathrm{L}_\infty^{loc}(R_+; \mathrm{H}) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(R_+; \mathrm{V}) \cap \mathrm{L}_p^{loc}\big(R_+; \mathrm{L}_p\big),$$

удовлетворяющие следующему интегральному тождеству:

$$-\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} u_0 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dxdt + \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \lambda\nabla u_0 \cdot \nabla\psi\, dxdt + \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \overline{a}(x)f(u_0)\cdot\psi\, dxdt + \\ + \int\limits_{\Gamma_1\times\mathbb{R}_+} P(\hat{x})u_0\cdot\psi\, dsdt$$

$$= \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \overline{h}(x)\cdot\psi\, dxdt + \int\limits_{\Gamma_1\times\mathbb{R}_+} G(\hat{x})\cdot\psi\, dsdt \qquad (2.3.2)$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{C}_0^\infty(R_+; \mathrm{V} \cap \mathrm{L}_p)$. Для любого слабого решения $u(x,t)$ задачи (2.3.1) также имеет место $\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} \in \mathrm{L}_q(0, M; \mathrm{H}^{-r})$ (смотри подраздел 2.1). Напомним, что предельная область Ω в (2.3.1) и (2.3.2) не зависит от ε, и её граница содержит плоскую часть Γ_1.

Аналогично задаче (2.1.1), при любых начальных данных $U \in \mathrm{H}$ задача (2.3.1) имеет по крайней мере одно слабое решение (смотри замечание 2.1.2). Лемма 2.1.1 также справедлива для задачи (2.3.1), если заменить зависящие от ε коэффициенты a, h, p и g на усреднённые коэффициенты $\overline{a}(x)$, $\overline{h}(x)$, $P(\hat{x})$ и $G(\hat{x})$.

Заметим также, что все решения $u(t)$ задачи (2.3.1) удовлетворяют тем же неравенствам (2.1.14) и (2.1.15), но с нормами в функциональных пространствах по области Ω вместо Ω_ε.

Как обычно, обозначим через $\overline{\mathcal{K}}^+$ траекторное пространство для задачи (2.3.1) (множество всех слабых решений), принадлежащее пространствам $\mathcal{F}_+^{loc}$ и $\mathcal{F}_+^b$ (смотри подраздел 1.1). Напомним, что $\overline{\mathcal{K}}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство $\overline{\mathcal{K}}^+$

инвариантно относительно полугруппы сдвига $\{S(\tau)\}$, то есть $S(\tau)\overline{\mathcal{K}}^{+} \subseteq \overline{\mathcal{K}}^{+}$ для всех $\tau \geq 0$. Теперь мы строим траекторный аттрактор в топологии Θ_{+}^{loc} для задачи (2.3.1).

Аналогично утверждению 2.1.1 имеем:

Утверждение 2.3.1. Задача (2.3.1) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологическом пространстве Θ_{+}^{loc}. Множество $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничено в $\mathcal{F}_{+}^{b}$ и компактно в Θ_{+}^{loc}. Более того,

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_{+}\overline{\mathcal{K}},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (2.3.1) непусто и ограничено в $\mathcal{F}^{b}$.

Также выполняется включение $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{B}_0(R)$, где $\mathcal{B}_0(R)$ – шар в пространтсве $\mathcal{F}_{+}^{b}$ с достаточно большим радиусом R. Наконец, аналог следствия 2.1.1 также справедлив для аттрактора $\overline{\mathfrak{A}}$.

Следствие 2.3.1. Для любого множества $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{K}}^{+}$, ограниченного в $\mathcal{F}_{+}^{b}$, имеет место

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{H}^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M}S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right) \to 0,$$

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}_{\varepsilon}^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M}S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right) \to 0 \ \ (\tau \to \infty), \qquad \forall M > 0.$$

Теперь сформулируем основные результаты, касающиеся предельного поведения траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_{\varepsilon}$ систем реакции-диффузии (2.1.1) при $\varepsilon \to 0$ в критическом случае $\beta = 1 - \alpha$.

Теорема 2.3.1. В топологическом пространстве Θ_{+}^{loc} справедливо

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon} \to \overline{\mathfrak{A}} \text{ при } \varepsilon \to 0+. \tag{2.3.3}$$

Более того,

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} \to \overline{\mathcal{K}} \text{ при } \varepsilon \to 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \tag{2.3.4}$$

Доказательство. Очевидно, что (2.3.4) влечёт (2.3.3). Следовательно, достаточно доказать (2.3.4), то есть, для любой окрестности $O(\overline{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} существует $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(O) > 0$, такая что

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} \subset O(\overline{\mathcal{K}}) \text{ для } \ \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{2.3.5}$$

Предположим, что (2.3.5) неверно. Тогда существует $O'(\overline{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc}, последовательность $\varepsilon_k \to 0+ \ (k \to \infty)$, и последовательность решений $u_{\varepsilon_k}(\cdot$

$) = u_{\varepsilon_k}(t) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$, таких что

$$u_{\varepsilon_k} \notin O'(\overline{\mathcal{K}}) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}.$$

Функция $u_{\varepsilon_k}(x,t), t \in \mathbb{R}$, является решением задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} = \lambda \Delta u_{\varepsilon_k} - a\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon_k}\right) f(u_{\varepsilon_k}) + h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon_k}\right), & x \in \Omega_{\varepsilon_k}, \\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} + \varepsilon_k^{\beta} p\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k} = \varepsilon_k^{1-\alpha} g\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right), & x \in \Gamma_1^{\varepsilon_k}, \\ u_{\varepsilon_k} = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

где $\beta = 1 - \alpha$. Для получения оценки, равномерной по ε, используем лемму 2.2.10. С помощью (2.2.28) и (2.2.29) получаем, что последовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ ограничена в $\mathcal{F}^b$, т.е.,

$$\| u_{\varepsilon_k} \|_{\mathcal{F}^b} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \| u_{\varepsilon_k}(t) \| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| u_{\varepsilon_k}(\vartheta) \|_1^2 \, d\vartheta \right)^{1/2} +$$

$$+\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| u_{\varepsilon_k}(\vartheta) \|_{\mathrm{L_p}}^p \, d\vartheta \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\beta} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_{\varepsilon}(x,\vartheta) \cdot u_{\varepsilon}(x,\vartheta) ds\, d\vartheta$$

$$+\varepsilon^{\beta} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_{\varepsilon}(x,\vartheta) \cdot u_{\varepsilon}(x,\vartheta)\, ds\, d\vartheta +$$

$$+\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \left\| \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(\vartheta) \right\|_{\mathrm{H}^{-r}}^q d\vartheta \right)^{1/q} \le C \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.3.7}$$

Напомним, что здесь $\beta = 1 - \alpha$. Постоянная C не зависит от ε. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'_k}(x,t)\} \subset \{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$, такая что $u_{\varepsilon'_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t)$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}. Здесь $\overline{u}(x,t) \in \mathcal{F}^b$ и $\overline{u}(t)$ удовлетворяет (2.3.7) с той же константой C. Из (2.3.7) также следует $u_{\varepsilon'_k}(x,t) \rightharpoonup \overline{u}(x,t)$ $(k \to \infty)$ слабо в $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{V})$, слабо в $\mathrm{L}_\mathrm{p}^{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{L_p})$, $*$-слабо в $\mathrm{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$ и $\frac{\partial u_{\varepsilon'_k}(x,t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t}$ $(k \to \infty)$ слабо в $\mathrm{L}_{\mathrm{q},w}^{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{H}^{-r})$. Утверждается, что $\overline{u}(x,t) \in \overline{\mathcal{K}}$. Имеем $\| \overline{u} \|_{\mathcal{F}^b} \le C$. Следовательно, осталось проверить, что

$\overline{u}(x,t) = u_0(x,t)$, то есть $\overline{u}$ является слабым решением (2.3.1).

Используя (2.3.7) и (2.1.3), находим, что

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} - \lambda\Delta u_{\varepsilon_k} - h_{\varepsilon_k}(x) \longrightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \lambda\Delta\overline{u} - \overline{h}(x) \text{ при } k \to \infty \qquad (2.3.8)$$

в пространстве $D'(R;\mathrm{H}^{-r})$, так как оператор дифференцирования непрерывен в пространстве обобщённых функций.

Докажем, что

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)f\left(u_{\varepsilon_k}\right) \rightharpoonup \overline{a}(x)f(\overline{u}) \text{ при } k \to \infty \qquad (2.3.9)$$

слабо в $\mathrm{L}_{q,w}^{loc}\left(R;\mathrm{L}_q\right)$. Зафиксируем произвольное число $M > 0$. Последовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ ограничена в $\mathrm{L}_p\left(-M,M;\mathrm{L}_p\right)$ (см. (2.3.7)). Тогда по (2.1.5) последовательность $\left\{f\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_q\left(-M,M;\mathrm{L}_q\right)$. Поскольку $\left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_2(-M,M;\mathrm{V})$, а $\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(t)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_q(-M,M;\mathrm{H}^{-r})$, можем предположить, что $u_{\varepsilon_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t)$ при $k \to \infty$ сильно в $\mathrm{L}_2(-M,M;\mathrm{L}_2) = \mathrm{L}_2(\Omega\times]-M,M[)$, значит,

$u_{\varepsilon_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t)$ при $k \to \infty$ почти всюду в $(x,t) \in \Omega\times]-M,M[$.

Так как функция $f(v)$ непрерывна по $v \in R$, заключаем, что почти всюду

$$f\left(u_{\varepsilon_k}(x,t)\right) \to f\left(\overline{u}(x,t)\right) \text{ при } k \to \infty \text{ в } (x,t) \in \Omega\times]-M,M[. \qquad (2.3.10)$$

Рассмотрим разность:

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)f(u_{\varepsilon_k}) - \overline{a}(x)f(\overline{u}) =$$

$$= a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f(u_{\varepsilon_k}) - f(\overline{u})\right) + \left(a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right) - \overline{a}(x)\right)f(\overline{u}). \qquad (2.3.11)$$

Докажем, что оба слагаемых в первой части (2.3.11) стремятся к нулю при $k \to \infty$ слабо в $\mathrm{L}_q\left(-M,M;\mathrm{L}_q\right) = \mathrm{L}_q(\Omega\times]-M,M[)$. Во-первых, последовательность $a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f(u_{\varepsilon_k}) - f(\overline{u})\right) \to 0$ при $k \to \infty$ почти всюду в $(x,t) \in \Omega\times]-M,M[$ (смотри (2.3.10)). Применяя лемму 1.3 из [49, глава 1, раздел 1], получаем

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f\left(u_{\varepsilon_k}\right) - f(\overline{u})\right) \rightharpoonup 0 \text{ при } k \to \infty$$

слабо в $L_q(\Omega \times]{-M}, M[)$. Во-вторых, последовательность $\left(a\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) - \bar{a}(x)\right) f(\bar{u}) \to 0$ при $k \to \infty$ слабо в $L_q(\Omega \times]{-M}, M[)$, поскольку $a\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) \rightharpoonup \bar{a}(x)$ при $k \to \infty$ $*$-слабо в $L_{\infty,*w}(-M, M; L_2)$, а $f(\bar{u}) \in L_q(\Omega \times]{-M}, M[)$. Таким образом, сходимость (2.3.9) доказана.

Теперь докажем, что

$$\varepsilon_k^{1-\alpha} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup P(\hat{x})\bar{u} \quad \text{при} \quad k \to +\infty \tag{2.3.12}$$

слабо в $L_2(\Gamma_1 \times] - M, M[)$. Действительно, имеем

$$\varepsilon_k^{1-\alpha} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\right) - P(\hat{x})\bar{u}(x) =$$

$$= \varepsilon_k^{1-\alpha} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\left(u_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\right) - \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\right)\right) +$$

$$+ \varepsilon_k^{1-\alpha} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\right) - P(\hat{x})\bar{u}(\hat{x}, 0).$$

Легко заметить, что

$$\varepsilon_k^{1-\alpha} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\left(u_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right), t\right) - \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right), t\right)\right) \rightharpoonup 0 \text{ при } k \to +\infty$$

слабо в $L_2(\Gamma_1 \times] - M, M[)$ по лемме 2.2.1. Покажем, что

$$\varepsilon_k^{1-\alpha} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k^{\alpha} F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right), t\right) - P(\hat{x})\bar{u}(\hat{x}, 0, t) \rightharpoonup 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty \tag{2.3.13}$$

слабо в $L_2(\Gamma_1 \times] - M, M[)$. Действительно, по лемме 2.2.4 оба слагаемых ограничены в $L_2(\Gamma_1 \times] - M, M[)$. Также видно, что сходимость (благодаря (2.1.10)) имеет место почти всюду по $t \in] - M, M[$. Применяя лемму 1.3 из [53], получаем слабую сходимость (2.3.13), а, значит, (2.3.12).

Аналогично поступаем с членами с $g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)$ и $G(\hat{x})$, используя лемму 2.2.2.

Следовательно, для $\overline{u}(x,t) = u_0(x,t)$ имеем

$$-\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_{\varepsilon_k}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\ dxdt + \int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \lambda\nabla u_{\varepsilon_k}\cdot\nabla\psi\ dxdt +$$

$$+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} a_{\varepsilon_k}(x)f(u_{\varepsilon_k})\cdot\psi\ dxdt + \varepsilon_k{}^{\beta}\int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)u_{\varepsilon_k}\cdot\psi\, dsdt \longrightarrow$$

$$-\int_{-M}^{M}\int_{\Omega} u_0\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\ dxdt + \int_{-M}^{M}\int_{\Omega} \lambda\nabla u_0\cdot\nabla\psi\ dxdt +$$

$$+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega} \overline{a}(x)f(u_0)\cdot\psi\ dxdt + \int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1} P(\hat{x})u_0\cdot\psi\, dsdt$$

при $k\to\infty$.

Используя (2.3.10), переходим к пределу в уравнении (2.3.6) при $k\to\infty$ в пространстве $D'(\mathbb{R};\mathrm{H}^{-r})$ и получаем, что функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.3.2), а, значит, является полной траекторией уравнения (2.3.1).

Следовательно, $u_0\in\overline{\mathcal{K}}$. Ранее было доказано, что $u_{\varepsilon_k}\to u_0$ при $k\to\infty$ в Θ^{loc}. Предположение $u_{\varepsilon_k}\notin O'(\overline{\mathcal{K}})$ (смотри [54]) влечёт $u_0\notin O'(\overline{\mathcal{K}})$, а, значит $u_0\notin\overline{\mathcal{K}}$. Получаем противоречие, что завершает доказательство теоремы.

Используя компактные вложения (2.1.16) и (2.1.17), можно улучшить сходимость (2.3.3).

Следствие 2.3.2. При любом $0<\delta\le 1$ и всех $M>0$ выполняется

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{L}_2([0,M];\mathrm{H}^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_{\varepsilon},\Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right)\to 0, \qquad (2.3.14)$$

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_{\varepsilon},\Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right)\to 0 \quad (\varepsilon\to 0+). \qquad (2.3.15)$$

Чтобы доказать (2.3.14) и (2.3.15), повторим доказательство теоремы 2.3.1, заменяя топологию Θ^{loc} на $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}^{1-\delta})$ или $C(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}^{-\delta})$.

Наконец, рассмотрим систему реакции-диффузии, для которых выполняется теорема единственности задачи Коши. Достаточно потребовать, чтобы нелинейный член $f(u)$ в (0.1) удовлетворял условию

$$(f(v_1)-f(v_2),v_1-v_2)\ge -C|v_1-v_2|^2 \text{ для любых } v_1,v_2\in\mathbb{R}^n. \qquad (2.3.16)$$

(смотри [33, p. 4-362; 42, p. 49-75]). В [42, p. 4975] доказано, что если выполняется (2.3.16), то (2.1.1) и (2.3.1) порождают динамические полугруппы в H, обладающие глобальными аттракторами $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{A}}$, ограниченными в V (смотри также [31, p. 3-498; 32, c. 3-290]). Более того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) \mid u \in \mathfrak{A}_\varepsilon\}, \qquad \overline{\mathcal{A}} = \{u(0) \mid u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

Сходимость (2.3.13) даёт:

Следствие 2.3.3. При выполнении условий теоремы 2.3.1 имеет место предельное соотношение

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{H}^{-\delta}}\left(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}\right) \to 0 \ \ (\varepsilon \to 0+).$$

2.4 Усреднение системы уравнений реакции-диффузии и её траекторный аттрактор в субкритическом случае $(\beta > 1-\alpha)$

Теперь исследуем поведение задачи (2.1.1) при $\varepsilon \to 0$ в субкритическом случае $\beta > 1-\alpha$. Рассматривается следующая усреднённая задача с неоднородным граничным условием Неймана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda\Delta u_0 - \overline{a}(x)f(u_0) + \overline{h}(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} = G(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Здесь функции $\overline{a}(x)$ и $\overline{h}(x)$ определены в (2.1.2) и (2.1.3), а $G(\hat{x})$ определена в (2.1.7), соответственно.

Как и прежде, мы рассматриваем слабые решения задачи (2.4.1), то есть функции

$$u(x,t) \in \mathrm{L}_\infty^{loc}(R_+; \mathrm{H}) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(R_+; \mathrm{V}) \cap \mathrm{L}_p^{loc}\left(R_+; \mathrm{L}_p\right),$$

которые удовлетворяют следующему интегральному тождеству

$$-\int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} u \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dxdt + \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \lambda\nabla u \cdot \nabla\psi\, dxdt + \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \overline{a}(x)f(u)\cdot\psi\, dxdt =$$

$$= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \overline{h}(x)\cdot\psi\, dxdt + \int_{\Gamma_1\times\mathbb{R}_+} G(\hat{x})\cdot\psi\, dsdt \tag{2.4.2}$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{C}_0^\infty(R_+; \mathrm{V} \cap \mathrm{L}_p)$. Для любого слабого решения $u(x,t)$ задачи (2.4.1) имеем $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{H}^{-r})$. Область Ω в (2.4.1) и (2.4.2) не зависит от ε, и её граница содержит плоскую часть Γ_1.

Аналогично задаче (2.1.1), для любых начальных данных $U \in \mathrm{H}$, задача (2.4.1) имеет хотя бы одно слабое решение (смотри замечание 2.1.2). По лемме 2.1.1 также верна для задачи (2.4.1), если заменить зависящие от ε коэффициенты a, h и g на соответствующие усреднённые коэффициенты $\overline{a}(x)$, $\overline{h}(x)$ и $G(\hat{x})$.

Заметим также, что все решения $u(t)$ задачи (2.4.1) удовлетворяют тем же неравенствам (2.1.14) и (2.1.15), но с нормами в функциональных пространствах по области Ω вместо Ω_ε.

Как обычно, обозначим $\overline{\mathcal{K}}^+$ траекторное пространство задачи (2.4.1) (множество всех слабых решений), принадлежащее пространствам $\mathcal{F}_+^{loc}$ и $\mathcal{F}_+^b$ (смотри подраздел 1.1). Напомним, что $\overline{\mathcal{K}}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство $\overline{\mathcal{K}}^+$ инвариантно относительно полугруппы сдвига $\{S(\tau)\}$, то есть $S(\tau)\overline{\mathcal{K}}^+ \subseteq \overline{\mathcal{K}}^+$ для всех $\tau \geq 0$. Далее мы строим траекторный аттрактор в топологии Θ_+^{loc} для задачи (2.4.1).

Аналогично утверждению 2.1.1 получаем:

Утверждение 2.4.1. Задача (2.4.1) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Множество $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Более того,

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (2.4.1) не пусто и ограничено в $\mathcal{F}^b$.

Также верно включение $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{B}_0(R)$, где $\mathcal{B}_0(R)$ – шар в F_+^b с достаточно большим радиусом R. Наконец, аналог следствия 2.1.1 также верен для траекторного аттрактора $\overline{\mathfrak{A}}$.

Следствие 2.4.1. Для любого ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ множества $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{K}}^+$ выполняется

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{H}^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right) \to 0,$$

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}_\varepsilon^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right) \to 0 \ \ (\tau \to \infty), \qquad \forall M > 0.$$

Сформулируем основной результат относительно предельного поведения траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ системы реакции-диффузии (2.1.1) при $\varepsilon \to 0$ в субкритическом случае $\beta > 1 - \alpha$.

Теорема 2.4.1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} имеет место сходимость

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \text{ при } \varepsilon \to 0+. \tag{2.4.3}$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \text{ при } \varepsilon \to 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \tag{2.4.4}$$

Доказательство. Легко заметить, что (2.4.4) влечёт за собой (2.4.3). Следовательно, достаточно доказать (2.4.4), то есть следующий факт: для любой окрестности $O(\overline{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} существует $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(O) > 0$, такое что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset O(\overline{\mathcal{K}}) \text{ для всех } \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{2.4.5}$$

Предположим, что (2.4.5) неверно. Тогда существует окрестность $O'(\overline{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc}, последовательность $\varepsilon_k \to 0+ \ (k \to \infty)$, и последовательность $u_{\varepsilon_k}(\cdot) = u_{\varepsilon_k}(t) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$, таких что

$$u_{\varepsilon_k} \notin O'(\overline{\mathcal{K}}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Функция $u_{\varepsilon_k}(x,t), t \in \mathbb{R}$, является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} = \lambda \Delta u_{\varepsilon_k} - a\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon_k}\right) f(u_{\varepsilon_k}) + h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon_k}\right), & x \in \Omega_{\varepsilon_k}, \\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} + \varepsilon_k^\beta p\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k} = \varepsilon_k^{1-\alpha} g\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right), & x \in \Gamma_1^{\varepsilon_k}, \\ u_{\varepsilon_k} = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

где $\beta > 1 - \alpha$. Чтобы получить равномерную по ε оценку решения, воспользуемся леммой 2.2.10. С помощью (2.2.28) и (2.2.29) следует, что последовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ ограничена в $\mathcal{F}^b$, то есть

$$\| u_{\varepsilon_k} \|_{\mathcal{F}^b} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \| u_{\varepsilon_k}(t) \| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| u_{\varepsilon_k}(\vartheta) \|_1^2 \, d\vartheta \right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| u_{\varepsilon_k}(\vartheta) \|_{\mathrm{L_p}}^p \, d\vartheta \right)^{1/p} + \varepsilon^\beta \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x,\vartheta) \cdot u_\varepsilon(x,\vartheta) ds \, d\vartheta$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1} \| \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(\vartheta) \|_{\mathrm{H}^{-r}}^q \, d\vartheta\right)^{1/q} \le C \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad (2.4.7)$$

где C – не зависит от ε. Следовательно, существует подпоследовательность $\left\{u_{\varepsilon'_k}(x,t)\right\} \subset \left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$, такая что $u_{\varepsilon'_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t)$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}. Здесь $\overline{u}(x,t) \in \mathcal{F}^b$ и удовлетворяет (2.4.7) с той же константой C. Из (2.4.7) получаем $u_{\varepsilon'_k}(x,t) \rightharpoonup \overline{u}(x,t)$ $(k \to \infty)$ слабо в $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R};\mathrm{V})$, слабо в $\mathrm{L}_\mathrm{p}^{loc}\left(\mathbb{R};\mathrm{L}_\mathrm{p}\right)$, $*$-слабо в $\mathrm{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H})$ и $\frac{\partial u_{\varepsilon'_k}(x,t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t}$ $(k \to \infty)$ слабо в $\mathrm{L}_{\mathrm{q},w}^{loc}(\mathbb{R};\mathrm{H}^{-r})$. Покажем, что $\overline{u}(x,t) \in \overline{K}$. Поскольку $\| \overline{u} \|_{\mathcal{F}^b} \le C$, остаётся доказать, что $\overline{u}(x,t) = u_0(x,t)$, т.е. является слабым решением (2.4.1).

Используя (2.4.7) и (2.1.3), получаем

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} - \lambda\Delta u_{\varepsilon_k} - h_{\varepsilon_k}(x) \longrightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \lambda\Delta\overline{u} - \overline{h}(x) \ \text{ при } k \to \infty$$

в пространстве обобщённых функции $D'(R;\mathrm{H}_\varepsilon^{-r})$.

Докажем, что

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right) f\left(u_{\varepsilon_k}\right) \rightharpoonup \overline{a}(x) f(\overline{u}) \text{ при } k \to \infty \qquad (2.4.8)$$

слабо в $\mathrm{L}_{q,w}^{loc}\left(R;\mathrm{L}_q\right)$. Зафиксируем произвольное $M > 0$. Поскольку $\left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_p\left(-M,M;\mathrm{L}_p\right)$, (см. (2.4.7)). Тогда в силу (2.1.5) последовательность $\left\{f\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_q\left(-M,M;\mathrm{L}_q\right)$. В тоже время, $\left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_2(-M,M;\mathrm{V})$ и $\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(t)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_q(-M,M;\mathrm{H}^{-r})$, Тогда мы пологаем, что $u_{\varepsilon_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t)$ при $k \to \infty$ сильно в $\mathrm{L}_2(-M,M;\mathrm{L}_2) = \mathrm{L}_2(\Omega \times]-M,M[)$, и следует

$$u_{\varepsilon_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t) \text{ при } k \to \infty \ \text{ почти всюду } (x,t) \in \Omega \times]-M,M[.$$

Тогда в силу непрерывности $f(v)$ мы заключаем, что

$$f\left(u_{\varepsilon_k}(x,t)\right) \to f\left(\overline{u}(x,t)\right) \text{ при } k \to \infty \ \text{ п.в. } (x,t) \in \Omega \times]-M,M[. \qquad (2.4.9)$$

Тогда:

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right) f(u_{\varepsilon_k}) - \overline{a}(x) f(\overline{u}) =$$

$$= a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f(u_{\varepsilon_k}) - f(\bar{u})\right) + \left(a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right) - \bar{a}(x)\right)f(\bar{u}). \qquad (2.4.10)$$

Покажем, что оба слагаемых стремятся к нулю при $k \to \infty$ слабо в $\mathrm{L}_q\left(-M,M;\mathrm{L}_q\right) = \mathrm{L}_q(\Omega \times]-M,M[)$. Во-первых, последовательность $a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f(u_{\varepsilon_k}) - f(\bar{u})\right)$ стремится к нулю при $k \to \infty$ для почти всех $(x,t) \in \Omega \times]-M,M[$ (см. (2.4.9)). Применяя лемму 1.3 из [53, p. 4-27],

заключаем, что

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f\left(u_{\varepsilon_k}\right) - f(\bar{u})\right) \rightharpoonup 0 \ \text{ при } k \to \infty$$

слабо в $\mathrm{L}_q(\Omega \times]-M,M[)$. Во-вторых, последовательность $\left(a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right) - \bar{a}(x)\right)f(\bar{u})$ также стремится к нулю при $k \to \infty$ слабо в $\mathrm{L}_q(\Omega \times]-M,M[)$, поскольку $a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right) \rightharpoonup \bar{a}(x)$ при $k \to \infty$ $*$-слабо в $\mathrm{L}_{\infty,*w}(-M,M;\mathrm{L}_2)$ и $f(\bar{u}) \in \mathrm{L}_q(\Omega \times]-M,M[)$. Следовательно, (2.4.8) доказано.

Сходимости $\varepsilon_k^{\beta} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)u_{\varepsilon_k}$ к нулю и $\varepsilon_k^{1-\alpha} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)$ к $G(\hat{x})$ следуют из леммы 2.2.5.

Таким образом, для $\overline{u}(x,t) = u_0(x,t)$ имеем

$$-\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_{\varepsilon_k}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\ dxdt + \int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \lambda\nabla u_{\varepsilon_k}\cdot\nabla\psi\ dxdt +$$

$$+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} a_{\varepsilon_k}(x)f\left(u_{\varepsilon_k}\right)\cdot\psi\ dxdt + +{\varepsilon_k}^{\beta}\int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)u_{\varepsilon_k}\cdot\psi\, dsdt +$$

$$+{\varepsilon_k}^{1-\alpha}\int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\cdot\psi\, dsdt \longrightarrow -\int_{-M}^{M}\int_{\Omega} u_0\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\ dxdt +$$

$$+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega} \lambda\nabla u_0\cdot\nabla\psi\ dxdt + \int_{-M}^{M}\int_{\Omega} \overline{a}(x)f(u_0)\cdot\psi\ dxdt + \int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1} G(\hat{x})\cdot\psi\ dxdt$$

при $k \to \infty$.

Используя (2.4.9), переходим к пределу в уравнении (2.4.6) при $k \to \infty$ в пространстве обобщённых функций $D'(\mathbb{R}; \mathrm{H}^{-r})$, и получим, что функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.4.2), выводим, что она является полной траекторией уравнения (2.4.1).

Следовательно, $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$. Тем самым, доказали, что $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}. Предположение $u_{\varepsilon_k} \notin O'(\overline{\mathcal{K}})$ (смотри [54, p. 215-234; 55]) влечёт $u_0 \notin O'(\overline{\mathcal{K}})$, и, следовательно, $u_0 \notin \overline{\mathcal{K}}$. Мы пришли к противоречию, что завершает доказательство теоремы.

Учитывая компактные вложения (2.1.16) и (2.1.17), улучшаем сходимость (2.4.4).

Следствие 2.4.1. Для любых $0 < \delta \leq 1$ и для всех $M > 0$ справедливы

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{L}_2([0,M];\mathrm{H}^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0, \tag{2.4.11}$$

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+). \tag{2.4.12}$$

Для доказательства (2.4.11) и (2.4.12) повторяем доказательство теоремы 2.4.1, меняя топологию Θ^{loc} на $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}^{1-\delta})$ или $C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}^{-\delta})$.

Наконец, рассмотрим систему реакции-диффузии, для которых имеет место теорема единственности задачи Коши. Для этого достаточно предположить, что нелинейный член $f(u)$ удовлетворяет условию

$$(f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) \geq -C|v_1 - v_2|^2 \text{ для любого } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4.13}$$

(смотри [33, p. 3-362; 42, p. 49-75]). В [42, p. 49-75] доказано, что при выполнении (2.4.13) задачи (2.1.1) и (2.4.1) порождает динамические полугруппы в H, обладающие глобальными аттракторами $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{A}}$, ограниченными в V (также смотри [31, p. 4-498; 32, с. 3-290]). Более того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) \mid u \in \mathfrak{A}_\varepsilon\}, \qquad \overline{\mathcal{A}} = \{u(0) \mid u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

Сходимость (2.4.12) влечёт:

Следствие 2.4.2. При выполнении условий теоремы 2.4.1 имеет место предельное соотношение

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{H}^{-\delta}}\left(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}\right) \to 0 \ \ (\varepsilon \to 0+).$$

2.5 Усреднение системы уравнений реакции-диффузии и её траекторный аттрактор в суперкритическом случае $(\beta < 1 - \alpha)$

В этом разделе мы теперь исследуем поведение задачи (2.1.1) при $\varepsilon \to 0$ в суперкритическом случае $\beta < 1 - \alpha$. Получаем следующую предельную задачу с однородным граничным условием Дирихле:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda\Delta u_0 - \overline{a}(x)f(u_0) + \overline{h}(x), & x \in \Omega, t > 0,\\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0,\\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0,\end{cases} \tag{2.5.1}$$

где $\overline{a}(x)$ и $\overline{h}(x)$ определены в (2.1.2) и (2.1.3), соответственно.

Заметим, что в суперкритическом случае влияние граничного слоя на часть границы Γ_1 полностью исчезает (сравните с критическим и субкритическим случаем).

Как и ранее, рассматриваются слабые решения задачи (2.5.1), то есть функции

$$u_0(x,t) \in \mathrm{L}_\infty^{loc}(R_+; \mathrm{H}) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(R_+; \mathrm{V}) \cap \mathrm{L}_p^{loc}\big(R_+; \mathrm{L}_p\big),$$

удовлетворяющие следующему интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} u_0 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t}\ dxdt + \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \lambda\nabla u_0 \cdot \nabla\psi\ dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \bar{a}(x)f(u_0)\cdot\psi\ dxdt = \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \bar{h}(x)\cdot\psi\ dxdt \tag{2.5.2}$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{C}_0^\infty\big(R_+; \mathrm{V} \cap \mathrm{L}_p\big)$. Для любого слабого решения $u_0(x,t)$ задачи (2.5.1) имеем $\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} \in \mathrm{L}_q(0, M; \mathrm{H}^{-r})$. Напомним, что предельная область Ω в (2.5.1) и (2.5.2) не зависит от ε, и её граница содержит плоскую часть Γ_1.

Аналогично задаче (2.1.1), для любых начальных данных $U \in \mathrm{H}$ задача (2.5.1) имеет по крайней мере одно слабое решение (смотри замечание 2.1.2). Лемма 2.1.1 также справедлива для задачи (2.5.1) при замене зависящих от ε коэффициентов a, h, p и g на соответствующие усреднённые коэффициенты $\overline{a}(x), \overline{h}(x)$.

Заметим также, что все решения $u(t)$ задачи (2.3.1) удовлетворяют тем же неравенствам (2.1.14) и (2.1.15), но с нормами в функциональных пространствах по области Ω вместо Ω_ε.

Как обычно, пусть $\overline{\mathcal{K}}^+$ – траекторное пространство для задачи (2.5.1) (множество всех слабых решений), принадлежащее соответствующим пространствам $\mathcal{F}_+^{loc}$ и $\mathcal{F}_+^b$ (смотри подраздел 2.1). Напомним, что $\overline{\mathcal{K}}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство $\overline{\mathcal{K}}^+$ инвариантно относительно полугруппы сдвига $\{S(\tau)\}$, то етсь, $S(\tau)\overline{\mathcal{K}}^+ \subseteq \overline{\mathcal{K}}^+$ для любого $\tau \geq 0$. Теперь мы строим траекторный аттрактор в топологии Θ_+^{loc} для задачи (2.5.1).

Аналогично утверждению 2.1.1 имеем:

Утверждение 2.5.1. Задача (2.5.1) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Множество $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Более того,

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}},$$

ядро $\overline{\mathcal{K}}$ задачи (2.5.1) непусто и ограничено в $\mathcal{F}^b$.

Также имеем $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{B}_0(R)$, где $\mathcal{B}_0(R)$ – шар в $\mathcal{F}_+^b$ с достаточно большим радиусом R. Наконец, аналог следствия 2.1.1 справедлив для траекторного аттрактора $\overline{\mathfrak{A}}$.

Следствие 2.5.1. Для любого множества $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{K}}^+$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$, имеем

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{H}^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right) \to 0,$$

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}_{\varepsilon}^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right) \to 0 \ \ (\tau \to \infty), \qquad \forall M > 0.$$

Сформулируем главный результат, касающийся предельного поведения траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ для системы реакции-диффузии (2.1.1) при $\varepsilon \to 0$ в суперкритическом случае $\beta < 1 - \alpha$.

Теорема 2.5.1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} выполняется предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \text{ при } \varepsilon \to 0+. \tag{2.5.3}$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \text{ при } \varepsilon \to 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \tag{2.5.4}$$

Доказательство. Легко видеть, что (2.5.4) влечёт (2.5.3). Следовательно, достаточно доказать (2.5.4), то есть следующий факт: для любой окрестности $O(\overline{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} существует $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(O) > 0$, такое что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset O\left(\overline{\mathcal{K}}\right) \text{ при } \ \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{2.5.5}$$

Предположим, что (2.5.5) неверно. Тогда существует окрестность $O'\left(\overline{\mathcal{K}}\right)$ в Θ^{loc}, последовательность $\varepsilon_k \to 0+ \ (k \to \infty)$, и последовательность $u_{\varepsilon_k}(\cdot) = u_{\varepsilon_k}(t) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$, такая что

$$u_{\varepsilon_k} \notin O'(\overline{\mathcal{K}}) \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Функция $u_{\varepsilon_k}(x,t), t \in \mathbb{R}$, является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} = \lambda \Delta u_{\varepsilon_k} - a\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon_k}\right) f(u_{\varepsilon_k}) + h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon_k}\right), & x \in \Omega_{\varepsilon_k}, \\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} + \varepsilon_k^{\beta} p\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k} = \varepsilon_k^{1-\alpha} g\left(\hat{x}, \dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right), & x \in \Gamma_1^{\varepsilon_k}, \\ u_{\varepsilon_k} = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

где $\beta < 1 - \alpha$. Чтобы получить равномерную по ε оценку решения используем лемму 2.2.10. Из (2.2.28) и (2.2.29) получаем, что последовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ ограничена в $\mathcal{F}^b$, то есть

$$\| u_{\varepsilon_k} \|_{\mathcal{F}^b} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| u_{\varepsilon_k}(t) \| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| u_{\varepsilon_k}(\vartheta) \|_1^2 \, d\vartheta \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| u_{\varepsilon_k}(\vartheta) \|_{\mathrm{L_p}}^p \, d\vartheta \right)^{1/p} + \varepsilon^{\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} p(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}) u_{\varepsilon}(x,\vartheta) \cdot u_{\varepsilon}(x,\vartheta) \, ds \, d\vartheta$$

$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \| \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(\vartheta) \|_{\mathrm{H}^{-r}}^q \, d\vartheta \right)^{1/q} \leq C \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.5.7}$$

Напомним, что здесь $\beta < 1 - \alpha$. Константа C не зависит от ε. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'_k}(x,t)\} \subset \{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$, такая что $u_{\varepsilon'_k}(x,t) \to \overline{u}(x,t)$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}. Здесь $\overline{u}(x,t) \in \mathcal{F}^b$ и $\overline{u}(t)$ удовлетворяет (2.5.7) с той же константой C. Из (2.5.7) следует, что $u_{\varepsilon'_k}(x,t) \rightharpoonup \overline{u}(x,t)$ $(k \to \infty)$ слабо в $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{V})$, слабо в $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}^{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{L_p})$, $*$-слабо в $\mathrm{L}_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$ и $\frac{\partial u_{\varepsilon'_k}(x,t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t}$ $(k \to \infty)$ слабо в $\mathrm{L}_{\mathrm{q},w}^{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{H}^{-r})$. Мы утверждаем, что $\overline{u}(x,t) \in \overline{K}$. Имеем $\| \overline{u} \|_{\mathcal{F}^b} \leq C$. Следовательно, осталось доказать, что $\overline{u}(x,t) = u_0(x,t)$, то есть является слабым решенеим задачи (2.5.1).

Используя (2.5.7) и (2.1.3), получаем

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} - \lambda \Delta u_{\varepsilon_k} - h_{\varepsilon_k}(x) \longrightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \lambda \Delta \overline{u} - \overline{h}(x) \ \text{ при } k \to \infty \tag{2.5.8}$$

в пространстве обобщённых функций $D'(R; \mathrm{H}_{\varepsilon}^{-r})$ (поскольку оператор дифференцирования непрерывен в пространстве обобщённых).

Докажем, что

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)f\left(u_{\varepsilon_k}\right) \rightharpoonup \bar{a}(x)f(\bar{u}) \text{ при } k\to\infty \tag{2.5.9}$$

слабо в $L_{q,w}^{loc}\left(R;L_q\right)$. Зафиксируем произвольное число $M>0$. Последовательность $\left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$ ограничено в $L_p\left(-M,M;L_p\right)$ (см. (2.5.7)). Тогда, в силу (2.1.5), последовательность $\left\{f\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right)\right\}$ ограничено в $L_q\left(-M,M;L_q\right)$. Так как $\left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$ ограничена в $L_2(-M,M;V)$, а $\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(t)\right\}$ ограничена в $L_q(-M,M;H^{-r})$, можно считать, что $u_{\varepsilon_k}(x,t)\to\bar{u}(x,t)$ при $k\to\infty$ сильно в $L_2(-M,M;L_2)=L_2(\Omega\times]-M,M[)$, и, следовательно,

$$u_{\varepsilon_k}(x,t)\to\bar{u}(x,t) \text{ при } k\to\infty \text{ почти всюду в } (x,t)\in\Omega\times]-M,M[.$$

Поскольку функция $f(v)$ нерперывна по $v\in\mathbb{R}^n$, заключаем, что

$$f\left(u_{\varepsilon_k}(x,t)\right)\to f\left(\bar{u}(x,t)\right) \text{ при } k\to\infty \text{ п.в. } (x,t)\in\Omega\times]-M,M[. \tag{2.5.10}$$

Далее, представим

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)f(u_{\varepsilon_k})-\bar{a}(x)f(\bar{u})=$$
$$=a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f(u_{\varepsilon_k})-f(\bar{u})\right)+\left(a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)-\bar{a}(x)\right)f(\bar{u}). \tag{2.5.11}$$

Покажем, что оба слагаемых в правой части (2.5.11) стремятся к нулю при $k\to\infty$ слабо в $L_q\left(-M,M;L_q\right)=L_q(\Omega\times]-M,M[)$. Первое слагаемое $a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f(u_{\varepsilon_k})-f(\bar{u})\right)\to 0$ при $k\to\infty$ почти всюду $(x,t)\in\Omega\times]-M,M[$ (смотри (2.5.10)). Применяя лемму 1.3 из [53, p. 4-27], получаем

$$a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\left(f\left(u_{\varepsilon_k}\right)-f(\bar{u})\right)\rightharpoonup 0 \text{ при } k\to\infty$$

слабо в $L_q(\Omega\times]-M,M[)$. Второе слагаемое $\left(a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)-\bar{a}(x)\right)f(\bar{u})\to 0$ при $k\to\infty$ слабо в $L_q(\Omega\times]-M,M[)$, поскольку $a\left(x,\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\rightharpoonup\bar{a}(x)$ при $k\to\infty$ $*$-слабо в $L_{\infty,*w}(-M,M;L_2)$, а $f(\bar{u})\in L_q(\Omega\times]-M,M[)$. Следовательно, (2.5.9) доказано.

Таким образом, для $\bar{u}(x,t)=u_0(x,t)$ имеем (в силу леммы 2.2.9, смотри также [3, p. 213-233])

$$
-\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_{\varepsilon_k}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\;dxdt+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}}\lambda\nabla u_{\varepsilon_k}\cdot\nabla\psi\;dxdt+
$$

$$
+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} a_{\varepsilon_k}(x)f\big(u_{\varepsilon_k}\big)\cdot\psi\;dxdt+{\varepsilon_k}^{\beta}\int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} p\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)u_{\varepsilon_k}\cdot\psi\,dsdt-
$$

$$
-\varepsilon_k^{1-\alpha}\int_{-M}^{M}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} g\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}\right)\cdot\psi\,dsdt\longrightarrow-\int_{-M}^{M}\int_{\Omega} u_0\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\;dxdt+
$$

$$
+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega}\lambda\nabla u_0\cdot\nabla\psi\;dxdt+\int_{-M}^{M}\int_{\Omega}\overline{a}(x)f(u_0)\cdot\psi\;dxdt
$$

при $k\to\infty$.

Используя (2.5.10), переходим к пределу в уравнении (2.5.6) при $k\to\infty$ в пространстве $D'(\mathbb{R};\mathrm{H}^{-r})$ и получаем, что функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.5.2), и, следовательно, является полной траекторией уравнения (2.5.1).

Следовательно, $u_0\in\overline{\mathcal{K}}$. Выше мы доказали, что $u_{\varepsilon_k}\to u_0$ при $k\to\infty$ в Θ^{loc}. Предположение $u_{\varepsilon_k}\notin O'\big(\overline{\mathcal{K}}\big)$ (см. [48]) влечёт $u_0\notin O'(\overline{\mathcal{K}})$, а, значит, $u_0\notin\overline{\mathcal{K}}$. Получаем противоречие, что завершает доказательство теоремы.

Используя компактные вложения (2.1.16) и (2.1.17), можно улучшить сходимость (2.5.4).

Следствие 2.5.1. Для любого $0<\delta\le 1$ и для всех $M>0$ справедливы

$$
\operatorname{dist}_{\mathrm{L}_2([0,M];\mathrm{H}^{1-\delta})}\big(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon,\Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\big)\to 0, \tag{2.5.12}
$$

$$
\operatorname{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}^{-\delta})}\big(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon,\Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\big)\to 0\quad(\varepsilon\to 0+). \tag{2.5.13}
$$

Для доказательства (2.5.12) и (2.5.13), повторяем доказательство теоремы 2.5.1, заменив топологию Θ^{loc} на $\mathrm{L}_2^{loc}\big(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}^{1-\delta}\big)$ или $\mathrm{C}\big(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}^{-\delta}\big)$.

Наконец, рассмотрим систему реакции-диффузии, для которых существует теорема единственности для задачи Коши. Достаточно предположить, что нелинейный член $f(u)$ в (2.1.1) удовлетворяет услвоию

$$
(f(v_1)-f(v_2),v_1-v_2)\ge -C|v_1-v_2|^2\ \text{для любых}\ v_1,v_2\in\mathbb{R}^n. \tag{2.5.14}
$$

(смотри [33, p. 3-360; 42, p. 49-75]). В [42, p. 49-75] было доказано, что если выполнено (2.5.14), то (2.1.1) и (2.5.1) порождает динамические полугруппы в H, обладающие глобальными аттракторами $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{A}}$, ограниченными в V (см. также [31, p. 4-496; 32, c. 4-288]). Более того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) \mid u \in \mathfrak{A}_\varepsilon\}, \qquad \overline{\mathcal{A}} = \{u(0) \mid u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

Сходимость (2.5.13) даёт

Следствие 2.5.2. При выполнении условий теоремы 2.5.1 имеет место предельное соотношение

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{H}^{-\delta}}\left(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}\right) \to 0 \ \ (\varepsilon \to 0+).$$

3 УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТИ СО СЛУЧАЙНОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

3.1 Постановки задачи

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d \cap \{x \mid x_d > 0\}$, $d \geq 2$, – гладкая ограниченная область, граница которой содержит нетривиальный плоский участок $\Gamma_1 = \partial D \cap \{x \mid x_d = 0\}$ с непустой $(d-1)$-мерной внутренностью $\mathring{\Gamma}_1$. Мы возмущаем плоскую часть границы таким образом, что возмущённая область имеет осциллирующую (колеблющуюся) границу (смотри рисунок 1). С этой целью вводим гладкую неотрицательную функцию $g(\hat{x})$, где $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$, такую, что $\operatorname{supp} g(\hat{x}) \subset \Gamma_0 \Subset \mathring{\Gamma}_1$, и зададим статистически однородную неположительную случайную функцию $F(\hat{\xi}, \omega)$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$, обладающую гладкими реализациями и определенную на страндартном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ определим

$$\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \hat{x} \in \Gamma_1, \qquad \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) < x_d \leq 0\}$$

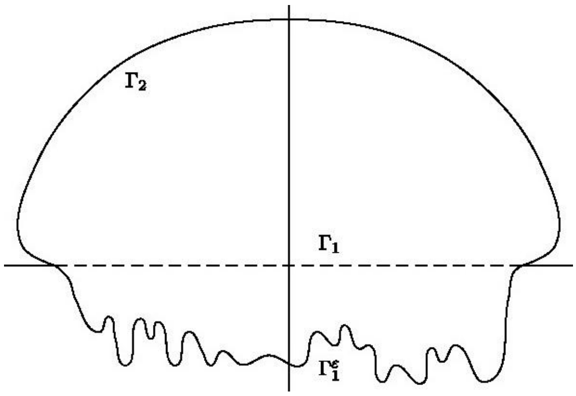

Рисунок 1 – Область со случайной быстро осциллирующей границей

И, наконец, вводим возмущенную область со случайной границей

$$D^\varepsilon = D \cup \Pi_\varepsilon.$$

Согласно данной конструкции, граница ∂D^ε состоит из частей Γ_2 и $\Gamma_1^\varepsilon = \left\{x \in \partial D^\varepsilon \ : \ (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d = \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right\}$ вместе образующие границу области.

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) f(u_\varepsilon) + r\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), & x \in D^\varepsilon, t > 0, \\
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) u_\varepsilon = g(\hat{x}) q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right), & x = (\hat{x}, x_d) \in \Gamma_1^\varepsilon, t > 0, \\
u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\
u_\varepsilon = U(x), & x \in D^\varepsilon, t = 0,
\end{cases}
\tag{3.1.1}
$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u^1, \dots, u^n)^\top$ – неизвестная вектор-функция;

$f = (f^1, \dots, f^n)^\top$– заданная нелинейная функция;

$r = (r^1, \dots, r^n)^\top$ – заданная правая часть;

λ – матрица размером $n \times n$ с постоянными коэффициентами, обладающая положительно определенной симметрической частью: $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^\top) \geq \varpi I$ (где I – единичная матица порядка n, а $\varpi > 0$). Предполагается, что $p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) = \operatorname{diag}\{p^1, \dots, p^n\}$, $q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) = (q^1, \dots, q^n)^\top$ случайные статистически однородные функции, причём $p^i\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) > 0$ при $i = 1, \dots n$. Здесь $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial u_\varepsilon^n}{\partial \nu}\right)^\top$ – нормальная производная вектор-функции u_ε, умноженная на матрицу λ, где $\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \nu} := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \lambda_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon^j}{\partial x_k} N_k$, $i = 1, \dots, n$ и $N = (N_1, \dots, N_d)$ – единичная внешняя нормаль к границе области. Обозначим через $p_{\max}$ максимум по $x \in \Gamma_1$ и i функций p^i.

Предпологается, что случайные функции $a_\varepsilon(x,\omega) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$ и $r_\varepsilon(x,\omega) = r\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$ являются статистически однородными, то есть

$$
a(x,\xi,\omega) = \mathrm{A}\big(x, T_\xi \omega\big), \qquad r(x,\xi,\omega) = \mathrm{R}\big(x, T_\xi \omega\big),
$$

где $\mathrm{A}: D \times \Omega \to \mathbb{R}$ и $\mathrm{R}: D \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ – измеримые функции.

Также предполагается, что $\mathrm{A}(x,\omega) \in C_b(\overline{D})$ почти наверное для всех $\omega \in \Omega$ и

$$
0 < \alpha_0 \leq \mathrm{A}(x,\omega) \leq \alpha_1, \quad |\mathrm{R}(x,\omega)| \leq \phi(x), \quad \forall x \in D, \tag{3.1.2}
$$

где $\phi(x)$ – положительная функция, такая, что $\phi \in L_2(D)$.

Эргодическая теорема Биркгофа позволяет заключить, что функции $a(x,\xi,\omega)$ и $r(x,\xi,\omega)$ имеют пространственные средние значения

$$
\overline{a}(x) := M(a)(x) = \mathbb{E}(\mathrm{A})(x), \qquad \overline{r}(x) := M(r)(x) = \mathbb{E}(\mathrm{R})(x)
$$

для любого $x \in D$. Причём функции $\overline{a}(x)$ и $\overline{r}(x)$ также удовлетворяют неравенствам

$$
\alpha_0 \leq \overline{a}(x) \leq \alpha_1, \quad |\overline{r}(x)| \leq \phi(x), \quad \forall x \in D. \tag{3.1.3}
$$

Из утверждения 1.2.2, почти наверное при $\omega \in \Omega$

$$\int\limits_D a_\varepsilon(x,\omega)\varphi(x)dx \to \int\limits_D \overline{a}(x)\varphi(x)dx \ \ (\varepsilon \to 0+) \ \ \forall\varphi \in L_1(D), \qquad (3.1.4)$$

$$\int\limits_{D^+} r_\varepsilon^i(x,\omega)\varphi(x)dx \to \int\limits_{D^+} \overline{r}^i(x)\varphi(x)dx \ \ (\varepsilon \to 0+) \ \ \forall\varphi \in L_2(D^+), \qquad (3.1.5)$$

где $i = 1, \dots, n$ и D^+ – такая область, что $D^\varepsilon \subset D^+$ для любого ε.

Предполагается, что вектор-функция $f(v) \in [C(\mathbb{R}^n)]^n$ удовлетворяет следующим условиям

$$f(v)\cdot v \geq \gamma \sum_{i=1}^n |v^i|^{p_i} - C,$$

$$\sum_{i=1}^n |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1\left(\sum_{i=1}^n |v^i|^{p_i} + 1\right), \qquad p_k \geq 2, \qquad \forall v \in R^n. \qquad (3.1.6)$$

Из (3.1.5) следует, что нормы $r_\varepsilon^i(x,\omega)$ почти наверное равномерно ограничены по ε в пространстве $L_2(D)$:

$$\| r_\varepsilon^i \|_{L_2(D)} \leq M_0, \quad \forall\varepsilon \in (0,1]. \qquad (3.1.7)$$

Обозначим

$$P(\hat{x}) = \mathbb{E}\left(\rho(\omega)\sqrt{1 + \left(g(\hat{x})\partial_\omega \mathrm{F}(\omega)\right)^2}\right),$$

$$Q(\hat{x}) = \mathbb{E}\left(\varrho(\omega)\sqrt{1 + \left(g(\hat{x})\partial_\omega \mathrm{F}(\omega)\right)^2}\right). \qquad (3.1.8)$$

Почти наверное имеют место следующие сходимости (смотри [56]):

$$\int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} q^i\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x},\varepsilon g(\hat{x})F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right) ds \to \int\limits_{\Gamma_1} Q^i(\hat{x})\, v(x)\, ds, \qquad (3.1.9)$$

$$\int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p^i\left(\hat{x},\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) u\left(\hat{x},\varepsilon g(\hat{x})F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right) v\left(\hat{x},\varepsilon g(\hat{x})F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right) ds \to$$

$$\longrightarrow \int\limits_{\Gamma_1} P^i(\hat{x})\, u(x)v(x)\, ds \qquad (3.1.10)$$

для любых $u, v \in H^1(D^\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь ds – элемент $(d-1)$-мерной меры на гиперповерхности.

Введём следующие обозначения для пространств: $\mathrm{H} := [L_2(D)]^n$, $\mathrm{H}_\varepsilon := [L_2(D^\varepsilon)]^n$, $\mathrm{V} := [H^1(D, \Gamma_2)]^n$, $\mathrm{V}_\varepsilon := [H^1(D^\varepsilon; \Gamma_2)]^n$. Нормы в этих пространствах задаются следующим образом:

$$\| v \|^2 := \int\limits_D \sum_{i=1}^n \left| v^i(x) \right|^2 dx, \qquad \| v \|_\varepsilon^2 := \int\limits_{D^\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left| v^i(x) \right|^2 dx,$$

$$\| v \|_1^2 := \int\limits_D \sum_{i=1}^n \left| \nabla v^i(x) \right|^2 dx, \qquad \| v \|_{1,\varepsilon}^2 := \int\limits_{D^\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left| \nabla v^i(x) \right|^2 dx.$$

Обозначим через V' сопряжённое пространство к пространству V, а через V'_ε – сопряжённое пространство к V_ε.

Пусть $q_i = p_i/(p_i - 1)$ для любого $i = 1, \dots, n$. Введём векторные обозначения $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $q = (q_1, \dots, q_n)$, а также определим пространства:

$$\mathrm{L}_p := L_{p_1}(D) \times \dots \times L_{p_n}(D), \qquad \mathrm{L}_{p,\varepsilon} := L_{p_1}(D^\varepsilon) \times \dots \times L_{p_n}(D^\varepsilon),$$

$$\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}_p) := L_{p_1}(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(D)) \times \dots \times L_{p_n}(\mathbb{R}_+; L_{p_n}(D)),$$

$$\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}_{p,\varepsilon}) := L_{p_1}(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(D^\varepsilon)) \times \dots \times L_{p_n}(\mathbb{R}_+; L_{p_n}(D^\varepsilon)).$$

Как и в работах [33, p. 3-360; 42, p. 49-75], мы рассматриваем слабые решения задачи Коши с начальными и граничными условиями (3.1.1), то есть функции

$$u_\varepsilon(x,t) \in \mathrm{L}_\infty^{loc}(R_+; \mathrm{H}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(R_+; \mathrm{V}_\varepsilon) \cap \mathrm{L}_p^{loc}\big(R_+; \mathrm{L}_{p,\varepsilon}\big),$$

которые удовлетворяют уравнению (3.1.1) в смысле обобщённых функций, то есть справедливо следующее интегральное тождество

$$-\int\limits_{D^\varepsilon \times \mathbb{R}_+} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dxdt + \int\limits_{D^\varepsilon \times \mathbb{R}_+} \lambda \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi\, dxdt +$$

$$+\int\limits_{D^{\varepsilon}\times\mathbb{R}_+} a_{\varepsilon}(x,\omega)f(u_{\varepsilon})\cdot\psi\ dxdt+\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon}\times\mathbb{R}_+} g(\hat{x})p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)u_{\varepsilon}\cdot\psi\,dsdt=$$

$$=\int\limits_{D^{\varepsilon}\times\mathbb{R}_+} r_{\varepsilon}(x,\omega)\cdot\psi\ dxdt+\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon}\times\mathbb{R}_+} g(\hat{x})q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\cdot\psi\,dsdt \qquad (3.1.11)$$

для любой функции $\psi\in \mathrm{C}_0^{\infty}(R_+;\mathrm{V}_{\varepsilon}\cap \mathrm{L}_{p,\varepsilon})$. Здесь $y_1\cdot y_2$ обозначает скалярное произведение векторов $y_1,y_2\in\mathbb{R}^n$.

Если $u_{\varepsilon}(x,t)\in \mathrm{L}_p(0,M;\mathrm{L}_{p,\varepsilon})$, то из условия (3.1.6) следует, что $f(u(x,t))\in \mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{L}_{q,\varepsilon})$. В то же время, если $u_{\varepsilon}(x,t)\in \mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{V}_{\varepsilon})$, то $\lambda\Delta u_{\varepsilon}(x,t)+r_{\varepsilon}(x,\omega)\in \mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{V}_{\varepsilon}')$. Следовательно, для произвольного слабого решения $u_{\varepsilon}(x,s)$ задачи (3.1.1) выполняется

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}(x,t)}{\partial t}\in \mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{L}_{q,\varepsilon})+\mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{V}_{\varepsilon}').$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что

$$\mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{L}_{q,\varepsilon})+\mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{V}_{\varepsilon}')\subset \mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{H}_{\varepsilon}^{-r}),$$

где $\mathrm{H}_{\varepsilon}^{-r}:=H^{-r_1}(D^{\varepsilon})\times\ldots\times H^{-r_n}(D^{\varepsilon})$, $r=(r_1,\ldots,r_n)$ и индексы $r_i=\max\{1,d(1/q_i-1/2)\}$, $i=1,\ldots,n$. Здесь $H^{-r}(D^{\varepsilon})$ обозначает пространство сопряжённое пространству Соболева $W_2^r(\Omega_{\varepsilon})$, $r>0$, функций в области D^{ε} с нулевым следом на границе.

Следовательно, для любого слабого решения $u_{\varepsilon}(x,t)$ задачи (3.1.1) производная по времени $\frac{\partial u_{\varepsilon}(x,t)}{\partial t}$ принадлежит пространству $\mathrm{L}_q(0,M;\mathrm{H}_{\varepsilon}^{-r})$.

Замечание 3.1.1. Существование слабого решения $u(x,t)$ задачи (3.1.1) при любых начальных данных $U\in H_{\varepsilon}$ и фиксированном ε может быть доказано стандартными методами (смотри, например [32, с. 3-290; 42, p. 49-75]*)*. Это решение может быть не единственным, так как функция $f(v)$ удовлетворяет лишь условиям (3.1.6) и не предполагается выполнение условия Липшица по переменной v.

Следующая лемма доказывается аналогично утверждению XV.3.1 из [33, p. 3-360].

Лемма 3.1.1. Пусть $u_{\varepsilon}(x,t)\in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;V_{\varepsilon})\cap L_p^{loc}(\mathbb{R}_+;L_{p,\varepsilon})$ – слабое решение задачи (3.1.1). Тогда

– $u_{\varepsilon}\in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}_{\varepsilon})$;
– функция $\| u_{\varepsilon}(\cdot,t)\|^2$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$, и, более того,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_{\varepsilon}(\cdot,t)\|^2+\int\limits_{D^{\varepsilon}}\lambda\nabla u_{\varepsilon}(x,t)\cdot\nabla u_{\varepsilon}(x,t)dx+$$

$$+\int\limits_{D^\varepsilon} a_\varepsilon(x,\omega) f(u_\varepsilon(x,t))\cdot u_\varepsilon(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right) u_\varepsilon(x,t)\cdot u_\varepsilon(x,t)ds =$$

$$= \int\limits_{D^\varepsilon} r_\varepsilon(x,\omega)\cdot u_\varepsilon(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\cdot u_\varepsilon(x,t)ds \qquad (3.1.12)$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и почти всех $\omega \in \Omega$.

Чтобы определить траекторное пространство $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ для задачи (3.1.1) используем общий подход из подраздела 1.1. Для любого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$ вводятся банаховы пространства:

$$\mathcal{F}_{t_1,t_2} := \mathrm{L_p}(t_1,t_2;\mathrm{L_p}) \cap \mathrm{L_2}(t_1,t_2;\mathrm{V}) \cap \mathrm{L_\infty}(t_1,t_2;\mathrm{H}) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L_q}(t_1,t_2;\mathrm{H}^{-r}) \right\}$$

с нормой

$$\| v \|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} := \| v \|_{\mathrm{L_p}(t_1,t_2;\mathrm{L_p})} + \| v \|_{\mathrm{L_2}(t_1,t_2;\mathrm{V})} + \| v \|_{\mathrm{L_\infty}(0,M;\mathrm{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathrm{L_q}(t_1,t_2;\mathrm{H}^{-r})}.$$

Обозначим $\mathcal{D}_{t_1,t_2} = \mathrm{L_q}(t_1,t_2;\mathrm{H}^{-r})$. Тогда $\mathcal{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1,t_2}$, и для $u(t) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$ выполняется $A\big(u(t)\big) \in \mathcal{D}_{t_1,t_2}$. Слабые решения задачи (3.1.1) рассматриваются теперь как решения уравнения согласно общей схеме подраздела 1.1.

Рассмотрим пространства

$$\mathcal{F}_+^{loc} = \mathrm{L_p^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{L_p}) \cap \mathrm{L_2^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{V}) \cap \mathrm{L_\infty^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L_q^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}^{-r}) \right\},$$

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc} = \mathrm{L_p^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{L_{p,\varepsilon}}) \cap \mathrm{L_2^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{V_\varepsilon}) \cap \mathrm{L_\infty^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H_\varepsilon}) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathrm{L_q^{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H_\varepsilon}^{-r}) \right\}.$$

Обозначим $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ – множество всех слабых решений задачи (3.1.1). Для любого $U \in \mathrm{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ непусто и достаточно велико.

Очевидно, что $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$, и пространство $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ инвариантно относительно сдвигов: если $u(t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, то по определению $S(\tau)\,u(t) = u(\tau + t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ при любом $\tau \geq 0$, то есть $S(\tau)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+$. Введём метрику $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$ в пространстве $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ по норме $\mathrm{L_2}(t_1,t_2;\mathrm{H})$, т.е.

$$\rho_{t_1,t_2}(u,v)=\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)-v(t)\|_{\mathrm{H}}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\quad\forall\ u(\cdot),v(\cdot)\in\mathcal{F}_{t_1,t_2}.$$

Топология Θ_+^{loc} в $\mathcal{F}_+^{loc}$ индуцируется этой метрикой. Рассматриваем эту топологию в пространстве траектории $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (3.1.1). Аналогично вводится топология $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$.

Рассмотрим полугруппу сдвигов $S(\tau)$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+, S(\tau)\colon\mathcal{K}_\varepsilon^+\to\mathcal{K}_\varepsilon^+,\ \tau\geq 0$. Эта полугруппа непрерывна в топологии $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$.

Используя схему из подраздела 1.1, можно определить ограниченные множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ с помощью пространства $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b=\mathrm{L}_\mathrm{p}^b\big(\mathbb{R}_+;\mathrm{L}_{\mathrm{p},\varepsilon}\big)\cap\mathrm{L}_2^b(\mathbb{R}_+;\mathrm{V}_\varepsilon)\cap\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}_\varepsilon)\cap\left\{v\ \middle|\ \frac{\partial v}{\partial t}\in\mathrm{L}_\mathrm{q}^b(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}_\varepsilon^{-r})\right\}$$

и $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b\subset\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ – ядро задачи (3.1.1), состоящее из всех полных слабых решений $u(t), t\in\mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}_\varepsilon^b=\mathrm{L}_\mathrm{p}^b\big(\mathbb{R};\mathrm{L}_{\mathrm{p},\varepsilon}\big)\cap\mathrm{L}_2^b(\mathbb{R};\mathrm{V}_\varepsilon)\cap\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R};\mathrm{H}_\varepsilon)\cap\left\{v\ \middle|\ \frac{\partial v}{\partial t}\in\mathrm{L}_\mathrm{q}^b(\mathbb{R};\mathrm{H}_\varepsilon^{-r})\right\}.$$

Аналогично определяются топологии Θ_ε^{loc} в $\mathcal{F}_\varepsilon^b$, а также пространство $\mathcal{F}^b$ и топология Θ^{loc} в $\mathcal{F}^b$.

Утверждение 3.1.1. При выполнении условий (3.1.6) и (3.1.2), система (3.1.1) имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ почти наверное ограничено в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$ и компактно в $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Более того,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon=\Pi_+\mathcal{K}_\varepsilon,$$

ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ непусто, ограничено в $\mathcal{F}_\varepsilon^b$ и компактно в Θ_ε^{loc}.

Для доказательства используется методика из [33, p. 3-360]. Для построения поглащающего множества (ограниченного в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$ и компактного $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$) можно использовать лемму 1 из [33, p. 3-360].

Легко проверить, что $\mathfrak{A}_\varepsilon\subset\mathcal{B}_0(R)$ для всех $\varepsilon\in(0,1)$, где $\mathcal{B}_0(R)$ – шар в $F_{\varepsilon,+}^b$ с достаточно большим радиусом R. Благодаря лемме Обена-Лионса-Саймона (см. [41, p. 3-524]),

$$\mathcal{B}_0(R)\Subset\mathrm{L}_2^{loc}\big(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}_\varepsilon^{1-\delta}\big),\tag{3.1.13}$$

$$\mathcal{B}_0(R)\Subset\mathrm{C}^{loc}\big(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}_\varepsilon^{-\delta}\big),\quad 0<\delta\leq 1.\tag{3.1.14}$$

Учитывая (3.1.13) и (3.1.14), можно усилить утверждение о сходимости к траекторному аттрактору.

Следствие 3.1.1. Для любого ограниченного в $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$ множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}^+_\varepsilon$ почти наверное выполняются

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{L}_2(0,M;\mathrm{H}^{1-\delta}_\varepsilon)}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathcal{K}_\varepsilon\right) \to 0,$$

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}^{-\delta}_\varepsilon)}\left(\Pi_{0,M} S(\tau)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathcal{K}_\varepsilon\right) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty,$$

где $M > 0$ – произвольная постоянная.

Поскольку $D \subset D^\varepsilon$ и D лежит в полупространстве $\{x_d > 0\}$, то любая функция $u(x,t)$, зависящая от $x \in D^\varepsilon$, и принадлежащая $\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}$, при сужении на D принадлежит $\mathcal{F}^b_+$, и, кроме того,

$$\| u \|_{\mathcal{F}^b_+} \leq \| u \|_{\mathcal{F}^b_{\varepsilon,+}}.$$

Используя это замечание, получаем:

Следствие 3.1.2. Траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничены в $\mathcal{F}^b_+$. Ядра $\mathcal{K}_\varepsilon$ равномерно ограничены в $\mathcal{F}^b$.

3.2 Вспомагательные леммы

Этот подраздел посвящён различным техническим утверждениям, которые используются в дальнейшем анализе. Некоторые из этих утверждений были доказаны в [56, p. 1-22], поэтому мы не проводим их доказательства, а лишь подчеркиваем их отличия от одномерного случая.

Лемма 3.2.1. Почти наверное справедливы неравенства

$$\left\| v\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x})\, F(\tfrac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega)\right) - v(\hat{x}, 0) \right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \, \| v \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}, \qquad (3.2.1)$$

$$\| v \|_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \, \| v \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}, \qquad (3.2.2)$$

для любой функции $v \in V_\varepsilon$, где C_1 и C_2 – детерминированные положительные константы.

Если $u \in [H^2(D^+)]^n$, и $d > 2$, то справедливо неравенство

$$\left\| u\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x})\, F(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega)\right) - u(\hat{x}, 0) \right\|_{[L_{\left(\frac{2d}{d-2}\right)}(\Gamma_1)]^n} \leq C_3 \varepsilon^{\frac{d+2}{2d}} \, \| u \|_{[H^2(D^+)]^n}, \qquad (3.2.3)$$

где C_3 – детерминированная константа.

Доказательство. Доказательства оценок (3.2.1) и (3.2.2) полностью аналогичны доказательству леммы 1 из [3, p. 213-233]. Константы C_1 и C_2 являются детерминированными в силу предположения (h1).

Для доказательства оценки (3.2.3) достаточно обосновать её для гладких функций; справедливость этой оценки для функций из пространства $[H^2(D^+)]^n$ затем будем следовать в силу плотности. Пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{\Gamma_1} \left| u\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x})\, F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right) - u(\hat{x}, 0)\right|^{\frac{2d}{d-2}} d\hat{x} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} \left| \int\limits_0^{\varepsilon g(\hat{x})\, F(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega)} \frac{\partial}{\partial x_d} u(\hat{x}, x_d) dx_d \right|^{\frac{2d}{d-2}} d\hat{x} \le$$

$$\le C\varepsilon^{\frac{d+2}{d-2}} \int\limits_{\Gamma_1} \left| \int\limits_0^{\varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)} \left|\frac{\partial}{\partial x_d} u(\hat{x}, x_d)\right|^{\frac{2d}{d-2}} dx_d \right| d\hat{x} \le C\varepsilon^{\frac{d+2}{d-2}} \parallel \nabla u \parallel^{\frac{2d}{d-2}}_{L_{\left(\frac{2d}{d-2}\right)}(D^+)}.$$

По теореме вложения Соболева (смотри, например, [57]) справедливо неравенство $\parallel \nabla u \parallel_{[L_{\left(\frac{2d}{d-2}\right)}(D^+)]^n} \le C \parallel u \parallel_{[H^2(D^+)]^n}$, где константа C не зависит от u. Это завершает доказательство оценки (3.2.3). Лемма доказана.

Из предыдущей леммы и теоремы о следе, получаем следующие оценки

$$\left\| v\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n} \le C \parallel v \parallel_{V_\varepsilon} \qquad (3.2.4)$$

и

$$\left\| u\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\right\|_{[L_{\left(\frac{2d}{d-2}\right)}(\Gamma_1)]^n} \le C \parallel u \parallel_{[H^2(D^+)]^n}, \qquad (3.2.5)$$

где константа C не зависит от ε.

При вычислении интегралов по границе Γ_1^ε удобно использовать координаты $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ на этой поверхности. Поэтому далее потребуется подходящее выражение для элемента объема размерности $(d-1)$ на Γ_1^ε в этой системе координат, чему и посвящена следующая лемма.

Лемма 3.2.2. Пусть ds – элемент $(d-1)$-мерного объёма на Γ_1^ε. Тогда почти наверное

$$ds = \sqrt{1 + \left| g(\hat{x})\, \partial_\omega \mathrm{F}(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\, \omega) \right|^2}\ d\hat{x}\ \ (1 + O(\varepsilon)), \tag{3.2.6}$$

где $|O(\varepsilon)| \le C\varepsilon$ и C – детеминированная константа.

Доказательство. Согласно предположениям, граница Γ_1^ε задаётся уравнением

$$x_d - \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) = 0.$$

Опуская зависимость от ω (что является обычной практикой), получаем

$$ds = \sqrt{(\varepsilon F \partial_{x_1} g + g \partial_{\xi_1} F)^2 + \cdots + (\varepsilon F \partial_{x_{n-1}} g + g \partial_{\xi_{n-1}} F)^2 + 1}\Big|_{\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\ \ d\hat{x}.$$

Обозначим

$$S = \sqrt{\varepsilon^2 |\nabla_{\hat{x}} g|^2 F^2 + 2\varepsilon F g (\nabla_{\hat{x}} g, \nabla_{\hat{\xi}} F) + g^2 |\nabla_{\hat{\xi}} F|^2 + 1}.$$

Прямым вычислением почти наверное получаем, что

$$S\big|_{\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}} - \sqrt{1 + g^2 |\nabla_{\hat{\xi}} F|^2}\Big|_{\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2 |\nabla_{\hat{x}} g|^2 F^2 + 2\varepsilon F g (\nabla_{\hat{x}} g, \nabla_{\hat{\xi}} F)}{S + \sqrt{1 + g^2 |\nabla_{\hat{\xi}} F|^2}}\Bigg|_{\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \le C_3 \varepsilon,$$

где C_3 – детеминированная константа, не зависящая от ε. Это и доказывает (3.2.6). Лемма доказана.

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы вложения Соболева (смотри, например, в [57, с. 4-330]).

Утверждение 3.2.1. Неравенство

$$\left| \int_{\Gamma_1} u \cdot v\, d\hat{x} \right| \le C_3 \parallel u \parallel_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]^n} \parallel v \parallel_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]^n}$$

выполняется равномерно для всех $u, v \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]^n$.

Доказательство этой леммы смотри, например, в [48, p. 167-189].

Лемма 3.2.3. При выполнении предположений (h1)-(h4) почти наверное для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{D^\varepsilon} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) v \cdot v \; ds \geq C_4 \parallel v \parallel_{\mathrm{V}_\varepsilon}^2 \qquad (3.2.7)$$

для любого $v \in V_\varepsilon$, где C_4 – детеминированная константа, независящая от ε.

Доказательство. Для заданного $p_0 > 0$ рассмотрим случайную величину на Ω, определяемую как

$$m_\varepsilon(\omega) = \mathcal{H}^{d-1}\left\{x \in \tilde{\Gamma}_1 : \; p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \geq p_0\right\},$$

где $\mathcal{H}^{d-1}$ – $(d-1)$-мерная мера Лебега на Γ_1, а $\tilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1$ открытое борелевское подмножество, такое что $g(\hat{x}) \geq g_0 > 0$ при $x \in \tilde{\Gamma}_1$. По теореме Биркгофа почти наверное выполняется

$$m_\varepsilon = \int_{\tilde{\Gamma}_1} 1_{\left\{\tilde{p}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\, \omega\right) \geq p_0\right\}} d\hat{x} \longrightarrow \left|\tilde{\Gamma}_1\right| \cdot \mathbb{E}\left(1_{\{\tilde{p}(\omega) \geq p_0\}}\right), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Из предположения (h3) следует существование таких $p_0 > 0$ и $m_0 > 0$, что почти для всех $\omega \in \Omega$ существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\omega)$, при котором $m_\varepsilon(\omega) > m_0$ для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Это и дает неравенство (3.2.7). Предположим противное, пусть существует последовательность $\{w_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty$, такая, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, и

$$\lim_{k\to\infty} [\parallel w_{\varepsilon_k} \parallel_{H^1(D^{\varepsilon_k})}^2]^{-1} \left(\int_{D^{\varepsilon_k}} |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 dx + \int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) w_{\varepsilon_k} \cdot w_{\varepsilon_k} \; ds \right) = 0.$$

Без потери общности, будем считать, что $\parallel w_{\varepsilon_k} \parallel_{[L_2(D^{\varepsilon_k})]^n} = 1$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \parallel \nabla w_{\varepsilon_k} \parallel_{[L_2(D^{\varepsilon_k})]^n} = 0 \qquad (3.2.8)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) w_{\varepsilon_k} \cdot w_{\varepsilon_k} \; ds \; = \; 0. \qquad (3.2.9)$$

Из (3.2.8) и условия нормировки следует, что $w_{\varepsilon_k} \to C_D$ в норме пространства V, где константа $C_D = \pm\ |D|^{-1/2}$. Тогда по теореме о следе, $w_{\varepsilon_k} \to C_D$ в $[L_2(\Gamma_1)]^n$. Далее, по леммам 3.2.1 и 3.2.2 и определению m_0, p_0 и $\tilde{\Gamma}_1$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) w_{\varepsilon_k} \cdot w_{\varepsilon_k}\ ds \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Gamma_1} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) w_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right)\right) \cdot w_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right)\right) d\hat{x} \geq$$

$$\geq \int\limits_{\tilde{\Gamma}_1} g_0\, p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) w_{\varepsilon_k}^2(\hat{x}, 0) \cdot w_{\varepsilon_k}^2(\hat{x}, 0) d\hat{x} + O\left(\sqrt{\varepsilon_k}\right) \geq \frac{g_0}{|D|} p_0 m_0 + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ почти наверное при $\varepsilon_k \to 0$. Это противоречит (3.2.9), что завершает доказательство. Лемма доказана.

Следующее утверждение также является следствием теоремы Биркгофа.

Лемма 3.2.4. Пусть $h(\hat{\xi}, \omega)$ – случайная статистически однородная функция, такая, что $\| \tilde{h} \|_{[L_\infty(\Omega)]^n} < \infty$, и предположим,

$$\mathbb{E}\left(h(\hat{\xi}, \omega)\right) \equiv 0.$$

Тогда почти наверное

$$\int\limits_{\Gamma_1} h\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) u^\varepsilon(\hat{x}) \cdot v^\varepsilon(\hat{x})\, d\hat{x} \longrightarrow 0 \qquad (3.2.10)$$

при $\varepsilon \to 0$, для любых семейств $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]^n$ таких, что $\| u_\varepsilon \|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]^n} \leq C$ и $\| v_\varepsilon \|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]^n} \leq C$.

Пусть далее $\tilde{h}_0 : D \longmapsto \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$ – случайный вектор, такой, что $\tilde{h}_0 \in (L_2(D))^k$, и пусть $R(\hat{x}, z) : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами

$$R \in C(\Gamma_1 \times \mathbb{R}^k),$$

$$|R(\hat{x}, \zeta)| \leq C(1 + |\zeta|) \qquad (3.2.11)$$

для всех $\hat{x} \in \Gamma_1$ и $\zeta \in \mathbb{R}^k$, а

$$\mathbb{E}\, R\left(\hat{x}, \tilde{h}_0(\cdot)\right) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Gamma}_1, \qquad (3.2.12)$$

тогда почти наверное

$$\int\limits_{\Gamma_1} R\left(\hat{x}, \tilde{h}_0\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega\right)\right) \cdot v^\varepsilon(\hat{x})\, d\hat{x} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (3.2.13)$$

для любого семейства $v^\varepsilon \in \mathrm{V}_\varepsilon$ с $\| v^\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \leq C$.

Доказательство. Из утверждения 1.2.2 и эргодической теоремы Биркгофа следует, что

$$h\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \ [L_p(\Gamma_1)]^n \ \forall \ p \geq 1,$$

при $\varepsilon \to 0$. Это предельное соотношение, в совокупности с теоремами вложения Соболева, влечёт за собой (3.2.10). Далее, вновь с использованием теоремы Биркгофа, можно легко вывести из условий (3.2.11), (3.2.12) и оценки $\| \tilde{h}^0 \|_{\mathrm{H}} \leq C$, что почти наверное выполняется следующее предельное соотношение

$$R\left(\hat{x}, \tilde{h}_0\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega\right)\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{слабо в} \ [L_2(\Gamma_1)]^n.$$

Согласно теоремам о следах и вложения Соболева, из неравенства $\| v^\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \leq C$ следует, что почти наверное семейство v^ε является относительно компактным в $[L_2(\Gamma_1)]^n$. Это даёт (3.2.13) и завершает доказательство леммы.

Рассмотрим вспомогательные эллиптические задачи

$$\begin{cases} -\lambda \Delta u_\varepsilon = r_\varepsilon(x, \omega) \quad \text{в} \ D^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon} + g(\hat{x}) p\left(\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) u_\varepsilon = g(\hat{x}) q\left(\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \quad \text{на} \ \Gamma_1^\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \ \Gamma_2 \end{cases} \qquad (3.2.14)$$

и

$$\begin{cases} -\lambda \Delta u_0 = \bar{r}(x) \quad \text{в} \ D, \\ -\dfrac{\partial u_0}{\partial x_d} + g(\hat{x}) P(\hat{x}) u_0 = g(\hat{x}) Q(\hat{x}) \quad \text{на} \ \Gamma_1, \\ u_0 = 0 \quad \text{на} \ \Gamma_2, \end{cases} \qquad (3.2.15)$$

где $P(\hat{x})$ и $Q(\hat{x})$ определены в (3.1.8).

Функция $u_\varepsilon \in \mathrm{V}_\varepsilon$ называется решением задачи (3.2.14), если она удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int\limits_{D^\varepsilon} \lambda \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) u_\varepsilon(x) \cdot v(x) ds =$$
$$= \int\limits_{D^\varepsilon} r_\varepsilon(x,\omega) \cdot v(x) dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x})\, q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot v(x) ds \qquad (3.2.16)$$

для любой функции $v \in \mathrm{V}_\varepsilon$.

Вариационная формулировка, соответстующая задаче (3.2.15), имеет вид

$$\int\limits_{D} \lambda \nabla u_0(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int\limits_{\Gamma_1} g(\hat{x})\, P(\hat{x})\, u_0(x) \cdot v(x)\, d\hat{x} =$$
$$= \int\limits_{D} \overline{r}(x) \cdot v(x) dx + \int\limits_{\Gamma_1} g(\hat{x})\, Q(\hat{x}) \cdot v(x) d\hat{x} \qquad (3.2.17)$$

для любой функции $v \in \mathrm{V}$.

Лемма 3.2.5. Почти наверное для любой $v^\varepsilon \in V_\varepsilon$ такой, что $\| v^\varepsilon \|_{V_\varepsilon} \leq C$ и $u \in [C^\infty(\mathbb{R}^d)]^n$, при $\varepsilon \to 0$ выполняются следующие предельные соотношения

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot v^\varepsilon(x)\, ds - \int\limits_{\Gamma_1} g(\hat{x}) Q(\hat{x}) \cdot v^\varepsilon(\hat{x}, 0)\, d\hat{x} \right| \to 0, \qquad (3.2.18)$$

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) v^\varepsilon(x) \cdot u(x) - \int\limits_{\Gamma_1} g(\hat{x}) P(\hat{x}) v^\varepsilon(\hat{x}, 0) \cdot u(\hat{x}, 0)\, d\hat{x} \right|$$
$$\to 0 \quad (3.2.19)$$

где $P(\hat{x})$ и $Q(\hat{x})$ определены в *(3.1.8)*.

Доказательство. Введем обозначение

$$I = \left| \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x})\, q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot v^\varepsilon(x)\, ds - \int\limits_{\Gamma_1} g(\hat{x})\, Q(\hat{x}) \cdot v^\varepsilon(\hat{x}, 0)\; d\hat{x} \right|.$$

Согласно лемме 3.2.2, имеем

$$I \leq \left| \int_{\Gamma_1} g(\hat{x}) \left[q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot v^{\varepsilon}\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right) \sqrt{1 + \left| g(\hat{x}) \partial_{\omega} \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega\right)\right|^2} - Q(\hat{x}) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot v^{\varepsilon}(\hat{x}, 0) \right] d\hat{x} \right| +$$

$$+ C\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left| g(\hat{x}) q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot v^{\varepsilon}\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right) \sqrt{1 + \left| g(\hat{x}) \partial_{\omega} \mathrm{F}(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega)\right|^2} \right| d\hat{x} =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Неравенство Коши-Буниковского и оценка (3.2.4) дают

$$I_2 \leq C\varepsilon \|v^{\varepsilon}\|_{\mathrm{V}_{\varepsilon}} \left\| \varrho\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\omega}\right) \sqrt{1 + \left| \partial_{\omega} \mathrm{F}(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega)\right|^2} \right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n}.$$

По утверждению 3.2.1 и лемме 3.2.1, имеем

$$I_1 \leq \left| \int_{\Gamma_1} g(\hat{x}) q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[v^{\varepsilon}\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right) - v^{\varepsilon}(\hat{x}, 0) \right] \sqrt{1 + \left| g(\hat{x}) \partial_{\omega} \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega\right)\right|^2} d\hat{x} \right| +$$

$$+ \left| \int_{\Gamma_1} g(\hat{x}) v^{\varepsilon}(\hat{x}, 0) \cdot \left[q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \sqrt{1 + \left| g(\hat{x}) \partial_{\omega} \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega\right)\right|^2} - Q(\hat{x}) \right] d\hat{x} \right| \leq$$

$$\leq C\sqrt{\varepsilon}\, \|v^{\varepsilon}\|_{\mathrm{V}_{\varepsilon}} \left\| \varrho\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega\right) \sqrt{1 + \left| \partial_{\omega} \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega\right)\right|^2} \right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n} +$$

$$+ \left| \int_{\Gamma_1} g(\hat{x}) v^{\varepsilon}(\hat{x}, 0) \cdot \left[q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right) \sqrt{1 + \left| g(\hat{x}) \partial_{\omega} \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}} \omega\right)\right|^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. Q(\hat{x}) \right] d\hat{x} \right|.$$

Объединяя с предыдущим, используя неравенство Коши-Шварца и (3.2.4), получаем почти наверное при достаточно малом ε

$$I \le C\sqrt{\varepsilon}\,\|v^\varepsilon\|_{\mathrm{V}_\varepsilon}\left\|\varrho(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega)\sqrt{1+\left|\partial_\omega \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega\right)\right|^2}\right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n} +$$

$$+\left|\int_{\Gamma_1} g(\hat{x})v^\varepsilon(\hat{x},0)\cdot\left[q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\sqrt{1+\left|g(\hat{x})\partial_\omega \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega\right)\right|^2}-Q(\hat{x})\right]d\hat{x}\right|. \qquad (3.2.20)$$

Далее, обозначим

$$R\big(\hat{x},(\varrho,\partial_\omega \mathrm{F},\varrho\partial_\omega \mathrm{F})\big) = g(\hat{x})\varrho(\omega)\sqrt{1+|g(\hat{x})\partial_\omega \mathrm{F}(\omega)|^2}-g(\hat{x})Q(\hat{x}).$$

Учитывая определение $Q(\hat{x})$, получаем

$$\mathbb{E}\big\{R\big(\hat{x},(\varrho,\partial_\omega \mathrm{F},\varrho\partial_\omega \mathrm{F})\big)\big\}=0 \ \text{ для всех } x\in\Gamma_1.$$

По лемме 3.2.4 второе слагаемое в правой части (3.2.20) стремится к нулю почти наверное при $\varepsilon\to 0$. По теореме Биркгофа и условию (h4), почти наверное при достаточно малом $\varepsilon>0$ выполняется

$$\left\|\varrho\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega\right)\sqrt{1+\left|\partial_\omega \mathrm{F}\left(T_{\frac{\hat{x}}{\varepsilon}}\omega\right)\right|^2}\right\|_{[L_2(\Gamma_1)]^n} \le C\left\|\varrho\sqrt{1+|\partial_\omega \mathrm{F}|^2}\right\|_{\mathrm{H}} \le C_1.$$

Это завершает доказательство (3.2.18).

Сходимость (3.2.19) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Ради простоты в дальнейшем аргумент ω в записях опускается. Кроме того, мы используем следующие обозначения $p^\varepsilon(\hat{x})=p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)$ и $q^\varepsilon(\hat{x})=q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)$. Доказательство теоремы опирается на следующий результат.

Замечание 3.2.1. По построению функция u_0 не определена на всей области D^ε. Применение техники симметрического продолжения (см., например [48, p. 167-189]) позволяет продолжить u_0 на более широкую область, обозначим её D^+, которая включает все области D^ε для всех $\varepsilon\in(0,1]$; для продолженной функции сохраняем то же обозначение u_0. В частности, для всех $\varepsilon\in(0,1]$ имеем оценку $\| u_0 \|_{H^2(D^\varepsilon)}\le C \| u_0 \|_{H^2(D)}$, где константа C не зависит от ε. Тоже самое справедливо для функции $\overline{r}(x)$.

Утверждение 3.2.2. При выполнении (h1)–(h4) существует $C>0$ такое, что почти наверное для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ выполняется следующая оценка

$$\| u_\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \leq C.$$

Если дополнительно выполнено условие (h3'), то

$$\mathbb{E}\big(\| u_\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}\big) \leq C. \tag{3.2.21}$$

Доказательство. Подставим $v = u_\varepsilon$ в вариационную формулировку (3.2.16), получаем

$$\int_{D^\varepsilon} \lambda \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) dx + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p^\varepsilon(\hat{x}) u_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x) ds =$$

$$= \int_{D^\varepsilon} r_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x) dx + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x})\, q^\varepsilon(\hat{x}) \cdot u_\varepsilon(x) ds. \tag{3.2.22}$$

По лемме 3.2.3 почти для каждого ω существует $\varepsilon_0(\omega) > 0$, такое что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнено

$$\int_{D^\varepsilon} \lambda \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) dx + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p^\varepsilon(\hat{x}) u_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x) ds \geq C \| u_\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon}^2. \tag{3.2.23}$$

Согласно теореме Биркгофа, почти наверное для достаточно малого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\left| \int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x})\, q^\varepsilon(\hat{x}) \cdot u_\varepsilon(x) ds \right| \leq C \| u_\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \left\| \varrho \sqrt{1 + |\partial_\omega \mathrm{F}|^2} \right\|_{\mathrm{H}}. \tag{3.2.24}$$

Совместив это с неравенством Коши-Буняковского, получаем

$$\| u_\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} \leq C \left(\| \mathrm{R} \|_{[L_2(D^+)]^n} + \left\| \varrho \sqrt{1 + |\partial_\omega \mathrm{F}|^2} \right\|_{\mathrm{H}} \right).$$

Это доказывает первую оценку утверждения. Мы также показали, что почти наверное и для малых $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x}) p^\varepsilon(\hat{x}) u_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x) ds \ \leq\ C, \tag{3.2.25}$$

где C – детерминированная константа.

Чтобы доказать (3.2.21), заметим, что при выполнении условия (h3’) оценка (3.2.23) справедлива равномерно по $\varepsilon > 0$ и $\omega \in \Omega$. Тогда, взяв математическое ожидание в обеих частях (3.2.22), используя (3.2.23) и неравенство Коши-Буняковского, получаем требуемую оценку. Это завершает доказательство.

Теорема 3.2.1. Предположим, что $r \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^d)$, выполнены условия (h1)–(h4), и почти наверное $F(x,\omega)$ имеет непрерывно дифференцируемые реализации. Тогда почти наверное для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (3.2.14) имеет единственное решение, и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathrm{H}_\varepsilon} = 0, \tag{3.2.26}$$

где u_0 – решение задачи (3.2.15). Если дополнительно выполнено условие (h3’), то

$$\mathbb{E}\big(\| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathrm{H}_\varepsilon}\big) \longrightarrow 0 \tag{3.2.27}$$

при $\varepsilon \to 0$.

При выполнении условий (h1), (h2’), (h3) и (h4) почти наверное имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} = 0. \tag{3.2.28}$$

Наконец, если выполнены (h1), (h2’), (h3’) и (h4), то

$$\mathbb{E}\big(\| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathbf{V}_\varepsilon}\big) \longrightarrow 0 \tag{3.2.29}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 3.2.2. Заметим, что в случае малой размерности $d < 5$ условия (h2) и (h2’) совпадают.

Замечание 3.2.3. На самом деле, если $\partial_\omega F \in [L_\infty(\Omega)]^n$, то условие $p(\hat{\xi},\omega) \geq 0$ почти наверное в формулировке теоремы 3.2.1 можно заметить более слабым условием $P(\hat{x}) > 0$.

Доказательство теоремы 3.2.1. Существование и единственность u_ε слудует из (3.2.24), леммы 3.2.3 и леммы Лакса-Мильграма (смотри [30, с. 3-240]). Далее, из (3.2.16) и (3.2.17) следует, что для любого $v \in \mathrm{V}_\varepsilon$,

$$\int\limits_{D^\varepsilon} \lambda\nabla(u_0 - u_\varepsilon)\cdot\nabla v\,dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,p^\varepsilon\,(u_0 - u_\varepsilon)\cdot v\,ds =$$

$$= \int\limits_{D^\varepsilon} \lambda\nabla u_0\cdot\nabla v\,dx - \int\limits_{D^\varepsilon} r_\varepsilon\cdot v\,dx - \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,q^\varepsilon\cdot v\,ds + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,p^\varepsilon\,u_0\cdot v\,ds =$$

$$= \int\limits_{D} \lambda \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \int\limits_{D^\varepsilon} r_\varepsilon \cdot v \, dx - \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g \, q^\varepsilon \cdot v \, ds + \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \lambda \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g \, p^\varepsilon \, u_0 \cdot v \, ds = \left(\int\limits_{\Pi_\varepsilon} \lambda \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \int\limits_{\Pi_\varepsilon} r_\varepsilon \cdot v \, dx \right) +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1} g \, Q \cdot v \, d\hat{x} - \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g \, q^\varepsilon \cdot v \, ds \right) + \int\limits_{D} (\overline{r} - r_\varepsilon) \cdot v \, dx +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g \, p^\varepsilon \, u_0 \cdot v \, ds - \int\limits_{\Gamma_1} g \, P \, u_0 \cdot v \, d\hat{x} \right). \qquad (3.2.30)$$

Оценим правую часть последнего равенства. Согласно неравенству Коши-Буняковского, (3.2.2) и регулярности u_0, имеем:

$$\left| \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \lambda \nabla u_0 \cdot \nabla v \ \ dx \right| \leq C_1 \parallel \nabla u_0 \parallel_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \ \parallel v \parallel_{\mathrm{V}_\varepsilon} \leq$$

$$\leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \ \parallel u_0 \parallel_{[H^2(D^\varepsilon)]^n} \parallel v \parallel_{\mathrm{V}_\varepsilon} \qquad (3.2.31)$$

и

$$\left| \int\limits_{\Pi_\varepsilon} r_\varepsilon \cdot v \ \ dx \right| \leq \parallel r \parallel_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \parallel v \parallel_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \parallel r \parallel_{\mathrm{H}_\varepsilon} \parallel v \parallel_{\mathrm{V}_\varepsilon}.$$

Тогда, согласно лемме 3.2.5, при $\varepsilon \to 0$ почти наверное:

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g \, q^\varepsilon \cdot v \, ds - \int\limits_{\Gamma_1} g \, Q \cdot v \, d\hat{x} \right| \longrightarrow 0$$

и

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g \, p^\varepsilon \, u_0 \cdot v \, ds - \int\limits_{\Gamma_1} g \, P \, u_0 \cdot v \, d\hat{x} \right| \longrightarrow 0 \qquad (3.2.32)$$

для любого $v \in [C^\infty(\mathbb{R}^d)]^n$. Согласно (3.1.5), почти наверное выполняется

$$\left|\int\limits_D (\overline{r} - r_\varepsilon)\cdot v\,dx\right| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Из утверждения 3.2.2 следует, что для подпоследовательности $\varepsilon_k \to 0$, имеем $u_{\varepsilon_k} \to \hat{u}$ слабо в V, при $k \to \infty$. Это означает, что для любого $v \in [C^\infty(\mathbb{R}^d)]^n$ выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D^{\varepsilon_k}} \lambda\big(\nabla u_0 - \nabla u_{\varepsilon_k}\big)\cdot \nabla v\,dx = \int\limits_D \lambda\nabla(u_0 - \hat{u})\cdot\nabla v\,dx.$$

Переходя к пределу в (3.2.30) при $k \to \infty$ и используя (3.2.31)–(3.2.32), заключаем, что для любого $v \in [C^\infty(\mathbb{R}^d)]^n$:

$$\int\limits_D \lambda(\nabla u_0 - \nabla\hat{u})\cdot\nabla v\,dx + \int\limits_{\Gamma_1} P(\hat{x})(u_0 - \hat{u})\cdot v\,d\hat{x} = 0.$$

Из свойства плотности это равенство верно для любого $v \in \mathrm{V}$, откуда следует, что $u_0 = \hat{u}$. Таким образом, почти наверное всё семейство u_ε сходится к u_0 слабо в $H^1(D)$, а (3.2.26) следует из теоремы Реллиха-Кондрашева.

Для обоснования (3.2.27) отметим, что при выполнении предположения (h3’) справедлива оценка (3.2.21). Тогда применима теорема Лебега, и (3.2.27) следует из (3.2.26).

Теперь докажем сходимость в V_ε (3.2.28). Возьмем $v = (u_0 - u_\varepsilon)$ в качестве тестовой функции в (3.2.30). Тогда

$$\int\limits_{D^\varepsilon} \lambda\nabla(u_0 - u_\varepsilon)\cdot\nabla(u_0 - u_\varepsilon)\,dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,p^\varepsilon\,(u_0 - u_\varepsilon)\cdot(u_0 - u_\varepsilon)\,ds =$$
$$= \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \lambda\nabla u_0\cdot\nabla(u_0 - u_\varepsilon)\,dx - \int\limits_{\Pi_\varepsilon} r_\varepsilon\cdot(u_0 - u_\varepsilon)\,dx +$$
$$+\left(\int\limits_{\Gamma_1} g\,Q\cdot(u_0 - u_\varepsilon)d\hat{x} - \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,q^\varepsilon\cdot(u_0 - u_\varepsilon)ds\right) + \int\limits_D (\overline{r} - r_\varepsilon)\cdot v\,dx +$$
$$+\left(\int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,p^\varepsilon\,u_0\cdot(u_0 - u_\varepsilon)\,ds - \int\limits_{\Gamma_1} g\,P\,u_0\cdot(u_0 - u_\varepsilon)\,d\hat{x}\right). \qquad (3.2.33)$$

Мы собираемся оценить пять слагаемых в правой части (3.2.33). Во-первых, с учётом (3.2.2), имеем

$$\left|\int\limits_{\Pi_\varepsilon} \lambda\nabla u_0\cdot\nabla(u_0-u_\varepsilon)\,dx\right| \le C_1 \parallel \nabla u_0 \parallel_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \parallel u_0-u_\varepsilon \parallel_{H^1(D^\varepsilon)} \le$$

$$\le C_2\sqrt{\varepsilon} \parallel u_0 \parallel_{[H^2(D^\varepsilon)]^n} \parallel u_0-u_\varepsilon \parallel_{\mathbf{V}_\varepsilon} \le C\sqrt{\varepsilon} \qquad (3.2.34)$$

почти наверное при достаточно малых ε. Аналогично,

$$\left|\int\limits_{\Pi_\varepsilon} r_\varepsilon\cdot(u_0-u_\varepsilon)\,dx\right| \le \parallel r_\varepsilon \parallel_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \parallel u_0-u_\varepsilon \parallel_{[L_2(\Pi_\varepsilon)]^n} \le C_2\sqrt{\varepsilon}.$$

Далее, использую лемму 3.2.5 и утверждение 3.2.2, получаем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,q^\varepsilon\cdot(u_0-u_\varepsilon)\,ds - \int\limits_{\Gamma_1} g\,Q\cdot(u_0-u_\varepsilon)\,d\hat{x}\right| \longrightarrow 0$$

почти наверное при $\varepsilon\to 0$. Легко видеть, что из (3.1.5) следует почти наверное соотношение

$$\left|\int\limits_{D} (\overline{r}-r_\varepsilon)\cdot v\,dx\right| \longrightarrow 0$$

при $\varepsilon\to 0$.

Наиболее технически сложная часть доказательства заключается в оценке

$$J_\varepsilon = \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} g\,p^\varepsilon\,u_0\cdot(u_0-u_\varepsilon)\,ds - \int\limits_{\Gamma_1} g\,P\,u_0\cdot(u_0-u_\varepsilon)\,d\hat{x}.$$

Мы покажем, что почти наверное

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = 0. \qquad (3.2.35)$$

Для этого введем обозначения

$$U_0(\hat{x}) = u_0\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x})F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right),\quad U_\varepsilon(\hat{x}) = u_\varepsilon\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x})F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)\right), \qquad (3.2.36)$$

$$S^{\varepsilon}(\hat{x}) = \left(1 + g^2(\hat{x}) \quad \left|\partial_{\omega} F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Замитим, что, хотя это явно не указано, функция U_0 зависит от ε. Тогда J_{ε} записывается как сумма четырёх слагаемых

$$J_{\varepsilon} = \left(\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon}} g\, p^{\varepsilon}\, u_0 \cdot (u_0 - u_{\varepsilon}) ds - \int\limits_{\Gamma_1} g\, p^{\varepsilon}\, U_0 \cdot (U_0 - U_{\varepsilon}) S^{\varepsilon}\, d\hat{x}\right) +$$
$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1} g\, p^{\varepsilon}\, U_0 \cdot (U_0 - U_{\varepsilon})\, S^{\varepsilon}\, d\hat{x} - \int\limits_{\Gamma_1} g\, p^{\varepsilon}\, u_0 \cdot (U_0 - U_{\varepsilon})\, S^{\varepsilon}\, d\hat{x}\right) +$$
$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1} g\, p^{\varepsilon}\, u_0 \cdot (U_0 - U_{\varepsilon})\, S^{\varepsilon}\, d\hat{x} - \int\limits_{\Gamma_1} g\, p^{\varepsilon}\, u_0 \cdot (u_0 - u_{\varepsilon})\, S^{\varepsilon}\, d\hat{x}\right) +$$
$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1} g\, p^{\varepsilon}\, u_0 \cdot (u_0 - u_{\varepsilon})\, S^{\varepsilon}\, d\hat{x} - \int\limits_{\Gamma_1} g\, P\, u_0 \cdot (u_0 - u_{\varepsilon})\, d\hat{x}\right).$$

Докажем, что каждое из этих слагаемых стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Во-первых, отметим, что при выполнении предложения (h2'), согласно (3.2.4), (3.2.5) и неравенству Гёльдера, почти наверное для достаточно малого ε выполняется оценка

$$\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon}} p^{\varepsilon} u_0 \cdot u_0 ds \leq$$
$$\leq 2 \int\limits_{\Gamma_1} p^{\varepsilon}(\hat{x}) \left(1 + g^2(\hat{x}) \left|\partial_{\omega} F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} u_0\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right) \cdot$$
$$\cdot\, u_0\left(\hat{x}, \varepsilon g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \omega\right)\right) d\hat{x} \leq$$
$$\leq C \parallel \rho \parallel_{[L_{\infty}(D)]^n} \left(1 + \|\partial_{\omega} \mathrm{F}\|_{\left[L_{d/_2 \vee 2}(D)\right]^n}\right) \parallel u_0 \parallel^2_{[H^2(D^+)]^n} \leq$$
$$\leq C_1 \parallel u_0 \parallel^2_{[H^2(D^+)]^n} \tag{3.2.37}$$

с детеминированными коэффициентами C и C_1; обозначение $d/_2 \vee 2$ означает максимум $\max(d/_2, 2)$. Комбинируя эту оценку с (3.2.25), получаем, что почти наверное, для достаточно малого ε верна оценка

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} gp^\varepsilon (u_0 - u_\varepsilon)\cdot(u_0 - u_\varepsilon) ds \le C \qquad (3.2.38)$$

с детеминированной константой C. Тогда из (3.2.37) и (3.2.38) следует:

$$\left| \int_{\Gamma_1^\varepsilon} gp^\varepsilon\, u_0 \cdot (u_0 - u_\varepsilon) ds - \int_{\Gamma_1} gp^\varepsilon U_0 \cdot (U_0 - U_\varepsilon) S^\varepsilon(\hat{x}) d\hat{x} \right| \le C\varepsilon.$$

Учитывая (3.2.37), (3.2.38) и (3.2.25), применяя лемму 3.2.1 и неравенство Гёльдера , мы почти наверное получаем

$$\left| \int_{\Gamma_1} gp^\varepsilon U_0 \cdot (U_0 - U_\varepsilon) S^\varepsilon\, d\hat{x} - \int_{\Gamma_1} gp^\varepsilon u_0 \cdot (U_0 - U_\varepsilon) S^\varepsilon\, d\hat{x} \right| \le$$

$$\le \int_{\Gamma_1} \left| \left(\sqrt{gp^\varepsilon S^\varepsilon} (U_0 - u_0)\right) \cdot \left(\sqrt{gp^\varepsilon S^\varepsilon}\, (U_0 - U_\varepsilon)\right) \right| d\hat{x} \le$$

$$\le C \parallel U_0 - u_0 \parallel_{L_{\left(\frac{2d}{d-2}\right)}(\Gamma_1)} \le C\varepsilon^{\frac{d+2}{2d}} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Заметим, что лемма 3.2.1 применима здесь, так как U_0 допускает продолжение $\widetilde{U}_0 \in [H^2(D^\varepsilon)]^n$, для которого $\parallel \widetilde{U}_0 \parallel_{[H^2(D^\varepsilon)]^n} \le C \parallel U_0 \parallel_{[L^2(\Gamma_1)]^n}$ с детерминированной $C > 0$, не зависящей от ε. Эта техника не работает в двумерном случае. Чтобы обосновать последнее неравенство при $d = 2$, мы используем гёльдеревскую непрерывность u_0.

Теперь мы хотим показать, что почти наверное

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int_{\Gamma_1} gp^\varepsilon u_0 \cdot (U_0 - U_\varepsilon) S^\varepsilon\, d\hat{x} - \int_{\Gamma_1} gp^\varepsilon u_0 \cdot (u_0 - u_\varepsilon) S^\varepsilon\, d\hat{x} \right| = 0. \qquad (3.2.39)$$

Для этого, по теореме вложения Соболева и теореме о следе, $u_0 \in [L_{\frac{2(d-1)}{d-4}}(\Gamma_1)]^n$. Совмещая это с (3.2.3), предположением (h2') и используя неравенство Гёльдера, получаем почти наверное оценку:

$$\| gp^\varepsilon S^\varepsilon u_0 \cdot (U_0 - u_0) \|_{[L_1(\Gamma_1)]^n} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Заметим, что почти наверное $(U_\varepsilon - u_\varepsilon) \longrightarrow 0$ в $[L_2(\Gamma_1)]^n$, при $\varepsilon \to 0$, а семейство $gp^\varepsilon S^\varepsilon$ ограничено в $[L_2(\Gamma_1)]^n$. Тогда $gp^\varepsilon S^\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) \longrightarrow 0$ по мере на Γ_1 , как и $gp^\varepsilon S^\varepsilon u_0 \cdot (U_\varepsilon - u_\varepsilon)$. Остаётся показать, что это семейство равномерно интегрируемо. Тогда из теоремы Лебега о сходимости по мере следует (3.2.39).

Чтобы доказать равномерную интегрируемость $gp^\varepsilon S^\varepsilon\, u_0 \cdot U_\varepsilon$, перепишем это как

$$gp^\varepsilon S^\varepsilon\, u_0 \cdot U_\varepsilon = \left(\sqrt{gp^\varepsilon S^\varepsilon}\, u_0\right) \cdot \left(\sqrt{gp^\varepsilon S^\varepsilon}\, U_\varepsilon\right).$$

Почти наверное $\sqrt{gp^\varepsilon S^\varepsilon}\, U_\varepsilon$ ограничено в $[L_2(\Gamma_1)]^n$ (смотри (3.2.25)), $\sqrt{gp^\varepsilon S^\varepsilon}$ ограничено в $[L_d(\Gamma_1)]^n$, и $u_0 \in [L_{2(d-1)/(d-4)}(\Gamma_1)\,]^n$, значит, произведение ограничено в $[L_{(2d^2-2d)/(2d^2-3d-2)}(\Gamma_1)]^n$, что гарантирует равномерную интегрируемость функции $gp^\varepsilon S^\varepsilon\, u_0 \cdot U_\varepsilon$.

Аналогично, почти наверное u_ε ограничено в $[H^{1/2}(\Gamma_1)]^n$, и по теореме вложения Соболева в $[L_{2(d-1)/(d-2)}(\Gamma_1)]^n$. Тогда по неравенству Гёльдера $gp^\varepsilon S^\varepsilon\, u_0 \cdot u_\varepsilon$ ограничено в $[L_{(2d^2-2d)/(2d^2-2d-4)}(\Gamma_1)]^n$, а, значит, также равномерно интегрируемо. Это и доказывает (3.2.39). Здесь предполагается, что $d > 4$; для меньших размерностей (3.2.39) доказывается аналогично с очевидными упрощениями.

Теперь, чтобы доказать (3.2.35), остаётся показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_1} (g\, p^\varepsilon S^\varepsilon - P)u_0 \cdot (u_0 - u_\varepsilon)d\hat{x} \;=\; 0. \tag{3.2.40}$$

Это следует из эргодической теоремы Биркгофа. В самом деле, по определению P, имеем

$$\mathbb{E}\left\{g(\hat{x})\rho\sqrt{1+g^2(\hat{x})|\partial_\omega \mathrm{F}|^2} - P(\hat{x})\right\} = 0,$$

для любого $\hat{x} \in \Gamma_1$. Тогда по теореме Биркгофа при выполнении (h2’) функция $(g\, p^\varepsilon S^\varepsilon - P)$ почти наверное слабо стремится к нулю в $\left[L_{2\vee\frac{d}{2}}(\Gamma_1)\right]^n$. Так как $u_0 \in [H^2(D^+)]^n$,а $(u_0 - u_\varepsilon)$ ограничено в $[H^{1/2}(\Gamma_1)\,]^n$, семейство $u_0(u_0 - u_\varepsilon)$ компактно в $\left[L_{2\wedge\frac{d}{d-2}}(\Gamma_1)\right]^n$, где обозначение $2 \wedge \frac{d}{d-2}$ означает $\min\left(2, \frac{d}{d-2}\right)$. Это и доказывает (3.2.40).

Комбинируя (3.2.34)–(3.2.35), приходим к выводу, что все члены в правой части (3.2.33) почти наверное стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Это дает

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int\limits_{D^\varepsilon} \lambda\nabla(u_0 - u_\varepsilon)\cdot\nabla(u_0 - u_\varepsilon)\, dx + \int\limits_{\Gamma_1^\varepsilon} p^\varepsilon(u_0 - u_\varepsilon)\cdot(u_0 - u_\varepsilon)\, ds \right| = 0,$$

и по лемме 3.2.3 получаем почти наверное имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| u_0 - u_\varepsilon \|_{\mathrm{V}_\varepsilon} = 0.$$

Тогда при выполнении (h3') выполняется оценка (3.2.21), и мы получаем (3.2.29) по теореме Лебега. Доказательство теоремы 3.2.1 завершено.

Лемма 3.2.6. 1) Все решения $u_\varepsilon(t)$ уравнения (3.1.1) удовлетворяют условиям

$$\| u_\varepsilon(t) \|_\varepsilon^2 \leq \| u_\varepsilon(0) \|_\varepsilon^2 \, e^{-\varkappa_1 t} + R_1^2, \tag{3.2.41}$$

$$\varpi \int_t^{t+1} \| u_\varepsilon(s) \|_{\varepsilon,1}^2 \, ds + 2a_0 \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_t^{t+1} \| u_\varepsilon^i(s) \|_{L_{p_i}(D^\varepsilon)}^{p_i} \, ds +$$
$$+2p_{\max} \int_t^{t+1} \| u_\varepsilon(s) \|_{\mathrm{L}_2(\Gamma_1^\varepsilon)}^2 \, ds \leq \| u_\varepsilon(t) \|_\varepsilon^2 + R_2^2, \tag{3.2.42}$$

где $\varkappa_1 > 0$ – константа, не зависящая от ε. Значения R_1 и R_2 зависят от M_0 (см. (3.1.7)) и не зависят от $u_\varepsilon(0)$ и ε.

2) Все решения $u(t)$ уравнения (3.3.1) удовлетворяет тем же неравенствам (3.2.41) и (3.2.42), но с нормами по области D, а не D^ε.

3.3 Усреднение системы уравнений реакции-диффузии и её траекторный аттрактор

Теперь мы исследуем поведение задачи (3.1.1) при $\varepsilon \to 0$. Получаем следующую предельную задачу с неоднородным граничным условием Фурье

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda \Delta u_0 - \overline{a}(x) f(u_0) + \overline{r}(x), & x \in D, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} + g(\hat{x}) P(\hat{x}) u_0 = g(\hat{x}) Q(\hat{x}), & x = (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in D, t = 0, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Здесь $\overline{a}(x)$ и $\overline{r}(x)$ определены в (3.1.4) и (3.1.5) соответственно, а $Q(\hat{x})$ и $P(\hat{x})$ – в (3.1.8).

Как и раньше, мы рассматриваем слабые решения задачи (3.3.1), то есть функции

$$u_0(x,t) \in \mathrm{L}_\infty^{loc}(R_+; \mathrm{H}) \cap \mathrm{L}_2^{loc}(R_+; \mathrm{V}) \cap \mathrm{L}_p^{loc}\big(R_+; \mathrm{L}_p\big),$$

удовлетворяющие следующему интегральному тождеству:

$$
-\int_{D\times\mathbb{R}_+} u_0 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t}\; dxdt + \int_{D\times\mathbb{R}_+} \lambda\nabla u_0 \cdot \nabla\psi\; dxdt +
$$

$$
+\int_{D\times\mathbb{R}_+} \bar{a}(x) f(u_0) \cdot \psi\; dxdt + \int_{\Gamma_1\times\mathbb{R}_+} g(\hat{x}) P(\hat{x}) u_0 \cdot \psi\, dsdt =
$$

$$
=\int_{D\times\mathbb{R}_+} \bar{r}(x) \cdot \psi\; dxdt + \int_{\Gamma_1\times\mathbb{R}_+} g(\hat{x}) Q(\hat{x}) \cdot \psi\, dsdt \qquad (3.3.2)
$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{C}_0^\infty(R_+; \mathrm{V} \cap \mathrm{L}_p)$. Для любого слабого решения $u_0(x,t)$ задачи (3.3.1) выполняется $\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} \in \mathrm{L}_q(0, M; \mathrm{H}^{-r})$ (смотри подраздел 3.1). Напомним, что предельная область D в задачах (3.3.1) и (3.3.2) не зависит от ε, и её граница содержит плоскую часть Γ_1.

Аналогично задаче (3.1.1), для любых начальных данных $U \in \mathrm{H}$, задачи (3.3.1) имеет по крайней мере одно слабое решение (смотри замечание 3.1.1). Лемма 3.1.1 также справедлива для задачи (3.3.1), если заменить зависящие от ε коэффициенты a, r, p и q на соответствующие усреднённые коэффициенты $\overline{a}(x), \overline{r}(x)$, $P(\hat{x})$ и $Q(\hat{x})$.

Как обычно, обозначим $\overline{\mathcal{K}}^+$ пространство траектории для задачи (3.3.1) (множество всех слабых решений), принадлежащее соответствующим пространствам $\mathcal{F}_+^{loc}$ и $\mathcal{F}_+^b$. Напомним, что $\overline{\mathcal{K}}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство $\overline{\mathcal{K}}^+$ инвариантно относительно сдвига по времени $S(\tau)\overline{\mathcal{K}}^+ \subseteq \overline{\mathcal{K}}^+$ для всех $\tau \geq 0$. Теперь мы строим траекторный аттрактор в топологии Θ_+^{loc} для задачи (3.3.1) (смотри подраздел 1.1).

Аналогично утверждению 3.1.1, имеем:

Утверждение 3.3.1. Задача (3.3.1) обладает траекторным аттрактором $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Множество $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Более того,

$$
\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}},
$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (3.3.1), оно непусто и ограничено $\mathcal{F}^b$.

Также верно, что $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{B}_0(R)$, где $\mathcal{B}_0(R)$ – шар в $\mathcal{F}_+^b$ достаточно большого радиуса R. Наконец, аналог Следствие 3.1.1 справедлив и для траекторного аттрактора $\overline{\mathfrak{A}}$.

Следствие 3.3.1. Для любого ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ множества $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{K}}^+$ почти наверное выполняются предельные соотношения

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M}S(\tau)\mathcal{B},\Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right)\to 0,$$

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H_\varepsilon^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M}S(\tau)\mathcal{B},\Pi_{0,M}\overline{\mathcal{K}}\right)\to 0\ \ (\tau\to\infty),\qquad \forall M>0.$$

Здесь мы сформулируем основной результат, касающийся предельного поведения траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ систем реакции-диффузии (3.1.1) при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 3.3.1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} почти наверное (в смысле меры μ) имеет место следующее предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon\to\overline{\mathfrak{A}}\ \text{при}\ \varepsilon\to 0+. \tag{3.3.3}$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon\to\overline{\mathcal{K}}\ \text{при}\ \varepsilon\to 0+\ \text{в}\ \Theta^{loc}. \tag{3.3.4}$$

Доказательство. Легко видеть, что (3.3.4) влечет (3.3.3). Следовательно, достаточно доказать (3.3.4), то есть для каждой окрестности $O(\overline{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} существует $\varepsilon_1=\varepsilon_1(O)>0$, такое, что почти наверное

$$\mathcal{K}_\varepsilon\subset O\left(\overline{\mathcal{K}}\right)\ \ \text{при}\ \ \ \varepsilon<\varepsilon_1. \tag{3.3.5}$$

Предположим, что (3.3.5) не выполняется. Тогда существует окрестность $O'(\overline{\mathcal{K}})\subset\ \Theta^{loc}$, последовательность $\varepsilon_k\to 0+\ \ (k\to\infty)$, и последовательность $u_{\varepsilon_k}(\cdot)=u_{\varepsilon_k}(t)\in\mathcal{K}_{\varepsilon_k}$, такая, что

$$u_{\varepsilon_k}\notin O'\left(\overline{\mathcal{K}}\right)\ \ \text{для всех}\ \ \ k\in\mathbb{N}.$$

Функция $u_{\varepsilon_k}(x,t), t\in\mathbb{R}$, является решением задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}=\lambda\Delta u_{\varepsilon_k}-a_{\varepsilon_k}(x,\omega)f(u_{\varepsilon_k})+r_{\varepsilon_k}(x,\omega), & x\in D^{\varepsilon_k},\\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial\nu}+g(\hat{x})p\left(\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)u_{\varepsilon_k}=g(\hat{x})q\left(\dfrac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right), & x\in\Gamma_1^{\varepsilon_k},\\ u_{\varepsilon_k}=0, & x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{3.3.6}$$

Чтобы получить оценку, равномерную по ε, применяем лемму 3.2.6. С помощью (3.2.41) и (3.2.42) получаем, что последовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ ограничена в F^b, то есть

$$\| u_{\varepsilon_k}\|_{F^b}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\| u_{\varepsilon_k}(t)\|+$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1}\ \parallel u_{\varepsilon_k}(\vartheta)\parallel_1^2\ d\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1}\ \parallel u_{\varepsilon_k}(\vartheta)\parallel_{\mathrm{L_p}}^p\ d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g(\hat{x})p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon},\omega\right)u_\varepsilon(x,\vartheta)\cdot u_\varepsilon(x,\vartheta)\,ds\,d\vartheta+$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1}\ \parallel\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(\vartheta)\parallel_{\mathrm{H}^{-r}}^q\ d\vartheta\right)^{1/q}\quad\le C\ \ \forall\,k\in\mathbb{N},\qquad(3.3.7)$$

где C – константа, не зависящая от ε. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k'}(x,t)\}\subset\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$, такая, что $u_{\varepsilon'_k}(x,t)\to\bar{u}(x,t)$ при $k\to\infty$ в Θ^{loc}. Здесь $\bar{u}(x,t)\in F^b$ и удовлетворяет (3.3.7) с той же константой C. Из (3.3.7) следует, что $u_{\varepsilon'_k}(x,t)\rightharpoonup\bar{u}(x,t)$ $(k\to\infty)$ слабо в $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R};\mathrm{V})$, слабо в $\mathrm{L}_\mathrm{p}^{loc}(\mathbb{R};\mathrm{L_p})$, $*$-слабо в $\mathrm{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;\mathrm{H})$, а также $\frac{\partial u_{\varepsilon'_k}(x,t)}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial\bar{u}(x,t)}{\partial t}$ $(k\to\infty)$ слабо в $\mathrm{L}_{\mathrm{q},w}^{loc}(\mathbb{R};\mathrm{H}^{-r})$. Утверждаем, что $\bar{u}(x,t)\in\overline{K}$. Так как $\parallel\bar{u}\parallel_{F^b}\le C$, остается показать, что $\bar{u}(x,t)=u_0(x,t)$, то есть это слабое решение задачи (3.3.1).

Используя (3.3.7) и (3.1.5), имеем:

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}-\lambda\Delta u_{\varepsilon_k}-r_{\varepsilon_k}(x)\longrightarrow\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}-\lambda\Delta\bar{u}-\bar{r}(x)\ \text{ при } k\to\infty.\qquad(3.3.8)$$

Покажем, что

$$a_{\varepsilon_k}(x,\omega)f\left(u_{\varepsilon_k}\right)\rightharpoonup\bar{a}(x)f(\bar{u})\text{ при } k\to\infty\qquad(3.3.9)$$

слабо в $\mathrm{L}_{q,w}^{loc}\left(R;\mathrm{L}_q\right)$. Зафиксируем произвольное число $M>0$. Последовательность $\left\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\right\}$ ограничена $\mathrm{L}_p\left(-M,M;\mathrm{L_p}\right)$ (см. (3.3.7)). Тогда в силу (3.1.6) последовательность $\left\{f\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_q\left(-M,M;\mathrm{L}_q\right)$. Так как $\{u_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ ограничена в $\mathrm{L}_2(-M,M;\mathrm{V})$ и $\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t}(t)\right\}$ ограничена в $\mathrm{L}_q(-M,M;\mathrm{H}^{-r})$, можно предположить, что $u_{\varepsilon_k}(x,t)\to\bar{u}(x,t)$ при $k\to\infty$ сильно в $\mathrm{L}_2(-M,M;\mathrm{L}_2)=\mathrm{L}_2(D\times]-M,M[)$, и тогда:

$$u_{\varepsilon_k}(x,t)\to\bar{u}(x,t)\text{ при } k\to\infty\ \text{ п. в. для всех } (x,t)\in D\times]-M,M[.$$

Поскольку функция $f(v)$ непрерывна в $v\in R$, то заключаем, что

$$f\left(u_{\varepsilon_k}(x,t)\right) \to f\big(\bar{u}(x,t)\big) \text{ при } k \to \infty \text{ п.в. } (x,t) \in D \times]-M,M[. \quad (3.3.10)$$

Имеем

$$a_{\varepsilon_k}(x,\omega) f(u_{\varepsilon_k}) - \bar{a}(x) f(\bar{u}) =$$
$$= a_{\varepsilon_k}(x,\omega)\big(f(u_{\varepsilon_k}) - f(\bar{u})\big) + \left(a_{\varepsilon_k}(x,\omega) - \bar{a}(x)\right) f(\bar{u}). \qquad (3.3.11)$$

Покажем, что оба слагаемых в правой части равенства (3.3.11) стремятся к нулю при $k \to \infty$ слабо в пространстве $\mathrm{L}_q\big(-M,M;\mathrm{L}_q\big) = \mathrm{L}_q(D \times]-M,M[)$. Во-первых, последовательность $a_{\varepsilon_k}(x,\omega)\big(f(u_{\varepsilon_k}) - f(\bar{u})\big)$ стремится к нулю при $k \to \infty$ почти всюду на $(x,t) \in D \times]-M,M[$ (см. (3.3.10)). Применяя лемму 1.3 из [46, р. 1-32], заключаем, что

$$a_{\varepsilon_k}(x,\omega)\left(f\left(u_{\varepsilon_k}\right) - f(\bar{u})\right) \rightharpoonup 0 \text{ при } k \to \infty$$

слабо в $\mathrm{L}_q(D \times]-M,M[)$. Во-вторых, последовательность $\left(a_{\varepsilon_k}(x,\omega) - \bar{a}(x)\right) f(\bar{u})$ также стремится к нулю при $k \to \infty$ слабо в $\mathrm{L}_q(D \times]-M,M[)$, поскольку $a_{\varepsilon_k}(x,\omega) \rightharpoonup \bar{a}(x)$ при $k \to \infty$ $*$-слабо в $\mathrm{L}_{\infty,*w}(-M,M;\mathrm{L}_2)$, а $f(\bar{u}) \in \mathrm{L}_q(D \times]-M,M[)$. Таким образом, равенство (3.3.9) доказано.

Теперь покажем, что

$$p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right) u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup P(\hat{x})\bar{u} \quad \text{при} \quad k \to +\infty \qquad (3.3.12)$$

слабо в $\mathrm{L}_2(\Gamma_1 \times]-M,M[)$. Действительно, имеем

$$p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right) u_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\right) - P(\hat{x})\bar{u}(x) =$$
$$= p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\left(u_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\right) - \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\right)\right) +$$
$$+ p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\right) - P(\hat{x})\bar{u}(\hat{x},0).$$

Нетрудно видеть, что

$$p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right)\left(u_{\varepsilon_k}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right), t\right) - \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k},\omega\right), t\right)\right) \rightharpoonup 0$$

при $k \to +\infty$ слабо в $\mathrm{L}_2(\Gamma_1 \times]-M, M[)$ в силу леммы 3.2.1. Покажем, что

$$p\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) \bar{u}\left(\hat{x}, \varepsilon_k\, g(\hat{x}) F\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right), t\right) - P(\hat{x}) \bar{u}(\hat{x}, 0, t) \rightharpoonup 0 \quad \text{при } k \to +\infty \quad (3.3.13)$$

слабо в $\mathrm{L}_2(\Gamma_1 \times]-M, M[)$. Действительно, по лемме 3.2.5 обе функции ограничены в $\mathrm{L}_2(\Gamma_1 \times]-M, M[)$. Также видно, что это сходимость почти всюду по $t \in]-M, M[$ (см. (3.1.10)). Применяя лемму 1.3 из [46, p. 1-32], получаем слабую сходимость (3.3.13), а, значит, и (3.3.12).

Сходимость $q\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega\right) \longrightarrow Q(\hat{x})$ следует из леммы 3.3.5.

Таким образом, для $\bar{u}(x,t) = u_0(x,t)$ имеем

$$-\int_{-M}^{M} \int_{D^{\varepsilon_k}} u_{\varepsilon_k} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\ dxdt + \int_{-M}^{M} \int_{D^{\varepsilon_k}} \lambda \nabla u_{\varepsilon_k} \cdot \nabla \psi\ dxdt +$$
$$+ \int_{-M}^{M} \int_{D^{\varepsilon_k}} a_{\varepsilon_k}(x) f(u_{\varepsilon_k}) \cdot \psi\ dxdt + \int_{-M}^{M} \int_{\Gamma_1^{\varepsilon_k}} p(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_k}, \omega) u_{\varepsilon_k} \cdot \psi\, dsdt \longrightarrow$$
$$-\int_{-M}^{M} \int_{D} u_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\ dxdt + \int_{-M}^{M} \int_{D} \lambda \nabla u_0 \cdot \nabla \psi\ dxdt +$$
$$+ \int_{-M}^{M} \int_{D} \bar{a}(x) f(u_0) \cdot \psi\ dxdt + \int_{-M}^{M} \int_{\Gamma_1} P(\hat{x}) u_0 \cdot \psi\, d\hat{x}dt$$

при $k \to \infty$.

Используя (3.3.10), переходим к пределу в уравнении (3.3.6) при $k \to \infty$ в пространстве обобщённых функций $D'(\mathbb{R}; \mathrm{H}^{-r})$ и получаем, что функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.3.2) а, значит, является полной траекторией уравнения (3.3.1).

Следовательно, $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$. Мы доказали выше, что $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}. Предположение $u_{\varepsilon_k} \notin O'(\overline{\mathcal{K}})$ (смотри [54, p. 215-234]) влечёт $u_0 \notin O'(\overline{\mathcal{K}})$, а, значит, $u_0 \notin \overline{\mathcal{K}}$. Получаем противоречие, что завершает доказательство теоремы.

Используя компактные вложения (3.1.13) и (3.1.14), можно улучшить сходимость (3.3.3).

Следствие 3.3.2. Для любого $0 < \delta \leq 1$ и всех $M > 0$ почти наверное выполняется

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{L}_2([0,M];\mathrm{H}^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0, \qquad (3.3.14)$$

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{C}([0,M];\mathrm{H}^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+). \qquad (3.3.15)$$

Чтобы доказать (3.3.14) и (3.3.15), повторяем доказательство теоремы 3.3.1, заменяя топологию Θ^{loc} на $\mathrm{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}^{1-\delta})$ или $C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}^{-\delta})$.

Наконец, рассмотрим системы реакция-диффузия, для которых справедлива теорема единственности задачи Коши. Достаточно потребовать, чтобы нелинейный член $f(u)$ в (3.1.1) удовлетворял условию

$$(f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) \geq -C|v_1 - v_2|^2 \text{ для любого } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n. \qquad (3.3.16)$$

(смотри [33, p. 3-360; 42, p. 49-75]). В [42, p. 49-75] было показано, что если (3.3.16) выполнено, то уравнения (3.1.1) и (3.3.1) порождают динамические полугруппы в H, обладающие глобальными аттракторами $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{A}}$, ограниченными в V (смотри также [31, p. 3-498; 32, c. 3-290]). Более того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) \mid u \in \mathfrak{A}_\varepsilon\}, \qquad \overline{\mathcal{A}} = \{u(0) \mid u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

Сходимость (3.3.15) даёт

Следствие 3.3.3. При выполнении условий теоремы 3.3.1 почти наверное выполняется

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}^{-\delta}}\left(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}\right) \to 0 \;\; (\varepsilon \to 0+).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию поведения решений начально-краевых задач для системы уравнений реакции-диффузии в области с локально осциллирующей и со случайно осциллирующей границей на больших промужутках времени.

Динамические системы и траекторные аттракторы являются удобным методом для изучения предельного поведения решений диссипативных эволюционных уравнений. Важным преимуществом метода траекторных аттракторов является возможность учитывать зависимость от параметров, использование для анализа глобальной устойчивости даже в случае отсутствия единственности решений, и многое другое. Можно рассматривать различные уравнения, а также уравнения в средах со сложной микроструктурой, как в представленной работе. И здесь классический подход, основанный на теории глобальных аттракторов, также применим при определенных дополнительных условиях, накладываемых на нелинейный член уравнений.

В работе получены новые результаты исследований по теории траекторных аттракторов для начально-краевых задач для систем уравнений реакции-диффузии в областях с шероховатой границей. Полученные результаты вносят весомый вклад в развитие математической науки и могут найти широкое применение в различных ее приложениях.

Совокупность представленных в диссертации результатов позволяет сформулировать следующие **выводы:**

1. Описано предельное поведение системы уравнений реакции-диффузии в области с локально осциллирующей границей в критическом случае и доказана сходимость траекторного и глобального аттракторов исходной задачи к траекторному и глобальному аттракторам соответственно предельной задачи.

2. Описано предельное поведение системы уравнений реакции-диффузии в области с локально осциллирующей границей в субкритическом случае и доказана сходимость траекторного и глобального аттракторов исходной задачи к траекторному и глобальному аттракторам соответственно предельной задачи.

3. Описано предельное поведение системы уравнений реакции-диффузии в области с локально осциллирующей границей в суперкритическом случае и доказана сходимость траекторного и глобального аттракторов исходной задачи к траекторному и глобальному аттракторам соответственно предельной задачи.

4. Описано предельное поведение симстемы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей и доказана сходимость траекторного и глобального аттракторов исходной задачи к траекторному и глобальному аттракторам соответственно предельной задачи, которая является детерминированной.

Полученные результаты могут быть использованы при чтении элективных курсов для магистрантов и докторантов по дисциплинам, связанным с дифференциальными уравнениями в частных производных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Homogenization of partial differential equations. – Boston: Birkhäuser, 2006. – 402 p.

2 Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 730-754.

3 Chechkin G.A., Friedman A., Piatnitski A.L. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1999. – Vol. 231, Issue 1. – P. 213-234.

4 Мельник Т.А., Чечкин Г.А. Асимптотический анализ краевых задач в густых трёхмерных многоуровневых соединениях // Математический сб. – 2009. – Т. 200, № 3. – С. 49-74.

5 Chechkin G.A., McMillan A., Jones R. et al. A computational study of the influence of surface roughness on material strength // Meccanica. – 2018. – Vol. 53, Issue 9. – P. 2411-2436.

6 Gaudiello A., Sili A. Homogenization of Highly Oscillating Boundaries with Strongly Contrasting Diffusivity // SIAM J. Math. Anal. – 2015. – Vol. 47, Issue 3. – P. 1671-1692.

7 Amirat Y. et al. Asymptotics of Simple Eigenvalues and Eigenfunctions for the Laplace Operator in a Domain with Oscillating Boundary // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2006. – Vol. 46, Issue 1. – P. 97-110.

8 Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl’shin R.R. Asymptotics for Eigenelements of Laplacian in Domain with Oscillating Boundary: Multiple Eigenvalues // Applicable Analysis. – 2007. – Vol. 86. – P. 873-897.

9 Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl’shin R.R. Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary. // CR Mécanique. – 2008. – Vol. 336. – P. 693-698.

10 Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl’shin R.R. Spectral Boundary Homogenization in Domains with Oscillating Boundaries. // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2010. – Vol. 11. – P. 4492-4499.

11 Беляев А.Г., Михеев А.Г., Шамаев А.С. Дифракция плоской волны на быстро осциллирующей поверхности. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32, №8. – С. 1258-1272.

12 Dancer E.N., Daners D. Domain perturbation for elliptic equations subject to Robin boundary conditions // Journal of Differential Equations. – 1997. – Vol. 138, Issue 1. – P. 86-132.

13 Gobbert M.K., Ringhofer C.A. An asymptotic analysis for a model of chemical vapor deposition on a microstructured surface // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1998. – Vol. 58, Issue 3. – P. 737-752.

14 Пастухова С.Е. Эффект осциллирующей границы при усреднении одной задачи климатизации // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 9. – С. 1216-1222.

15 Neuss N., Neuss-Radu M., A. Mikelić A. Effective laws for the Poisson

equation on domains with curved oscillating boundaries // Applicable Analysis. – 2006. – Vol. 85, Issue 5. – P. 479-502.

16 Назаров С.А. Асимптотика решения и моделирование задачи Дирихле в угловой области с быстро осциллирующей границей // Алгебра и анализ. – 2007. – Т. 19, № 2. – С. 183-225.

17 Назаров С.А. Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстро осциллирующей границей // Известия РАН. Серия математическая. – 2008. – Т. 72, № 3. – С. 103-158.

18 Козлов В.А., Назаров С.А. Асимптотика спектра задачи Дирихле для бигармонического оператора в области с сильно изрезанной границей // Алгебра и анализ. – 2010. – Т. 22, №6 . – С. 127-184.

19 Borisov D., Cardone G., Faella L. et al. Uniform resolvent convergence for trip with fast oscillating boundary // Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 255, Issue 12. – P. 4378-4402.

20 Грушин В.В., Доброхотов С.Ю. Осреднение в задаче о длинных волнах на воде над участком дна с быстрыми осцилляциями // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 3. – С. 359-375.

21 Борисов Д.И. Об операторных оценках для плоских областей с нерегулярным искривлением границы: условия Дирихле и Неймана // Проблемы математического анализа. – 2022. – Т. 116. – С. 69-84.

22 Борисов Д.И., Сулейманов Р.Р. Об операторных оценках для эллиптических операторов со смешанными краевыми условиями в двумерных областях с быстро осциллирующей границей // Математические заметки. – 2024. – Т. 116, № 2. – С. 163-184.

23 Arrieta J.M., Bruschi S.M. Very rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a non uniformly Lipschitz deformation // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2010. – Vol. 14, Issue 2. – P. 327–351.

24 Barrenechea G.R., Le Tallec P., Valentin F. New wall laws for the unsteady incompressible Navier–Stokes equations on rough domains // Mathematical Modeling and Numerical Analisys. – 2002. – Vol. 36, Issue 2. – P. 177-203.

25 Jäger W., Mikelić A. Couette flows over a rough boundary and drag reduction // Communications in Mathematical Physics. – 2003. – Vol. 232, Issue 3. – P. 429-455.

26 Sanchez-Palencia É. Homogenization Techniques for Composite Media. – Berlin: Springer–Verlag, 1987. – 397 p.

27 Sanchez-Palencia É. Non-homogeneous media and vibration theory. – Berlin: Springer, 1980. – Vol. 127. – 400 p.

28 Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во Московского университета, 1992. –312 с.

29 Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.С. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1994. – 264 с.

30 Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007. – 246 с.

31 Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – NY.: Springer-Verlag, 1998. – 500 p.

32 Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1992. – 292 с.

33 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. – Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002. – 363 p.

34 Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. Averaging in infinite dimensions. // J. Integral Equations Applications. – 1990. – Vol. 2. – P. 463-494.

35 Ilyin A.A. Averaging principle for dissipative dynamical systems with rapidly oscillating right-hand sides // Sb. Math. – 1996. – Vol. 187. – P. 635-677.

36 Efendiev M., Zelik S. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 2002. – Vol. 19. – P. 961-989.

37 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Homogenization of random attractors for reaction-diffusion systems // CR Mecanique. – 2016. – Vol. 344. – P. 753-758.

38 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. et al. Homogenization of trajectory attractors of 3D Navier-Stokes system with randomly oscillating force // Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2017. – Vol. 37. – P. 2375-2393.

39 Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S. Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. – 2018. – Vol. 23. – P. 1133-1154.

40 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Weak Convergence of Attractors of Reaction–Diffusion Systems with Randomly Oscillating Coefficients // Applicable Analysis. – 2019. – Vol. 98. – P. 256-271.

41 Boyer F., Fabrie P. Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier–Stokes Equations and Related Models. – NY.: Springer, 2013. – 526 p.

42 Chepizhov V.V., Vishik M.I. Trajectory attractors for reaction-diffusion systems // Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center. – 1996. – Vol. 7. – P. 49-76.

43 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 409 с.

44 Мазья В.Г. Пространство С.Л. Соболева. – Л. Изд-во Ленинградского университета, 1985. – 416 с.

45 Lions J.L., Magenes E. Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1972. – 360 p.

46 Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. II Fourier Analysis. Self-Adjointness. – NY.: Academic, 1975. – Vol. 2. – 370 p.

47 Maz'ya V.G. Classes of spaces, measures, and capacities in the theory of spaces of differentiable functions // Itogi Nauki i Tekhniki. – 1985. – Vol. 1. – P. 159-228.

48 Lax P.D., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations // Ann. Math. Studies. – 1954. – Vol. 33. – P. 167-190.

49 Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Persson L.-E. On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrich's Inequality for Functions, Vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure // Journal of Inequalities and Applications. – 2008. – Vol. 2007. – P. 34138-1-34138-13.

50 Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A. et al. On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems // Russian J. of Mathematical Physics. – 2009. – Vol. 16. – P. 1-16.

51 Иосида К. Функциональный анализ / пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

52 Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

53 Lions J.-L. Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.

54 Chechkin G.A. et al. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain // Applicable Analysis. – 1998. – Vol. 71. – P. 215-235.

55 Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Математический сб. – 2001. – Т. 192, №7. – С. 3-20.

56 Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Boundary homogenization in domains with randomly oscillating boundary // Stochastic Processes and their Applications. – 2011. – Vol. 121, Iss. 1. – P. 1-23.

57 Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

58 Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Critical case // Networks and Heterogeneous Media. – 2024. – Vol. 19, Iss. 3. – P. 1381–1401.

59 Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Supercritical case // Ufa Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 17, Iss. 2. – P. 91–104.

60 Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Subcritical case // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2025. – Vol. 118, Iss. 2. – P. 28–43

61 Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. // Homogenization of attractors to the reaction-diffusion system in a domain with rough boundary // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2025. – Vol. 126, Iss. 2. – P. 3–24